

Profesores: Carrasco, Contreras, Da Silva

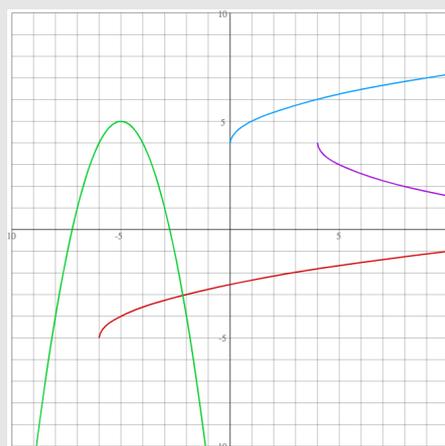
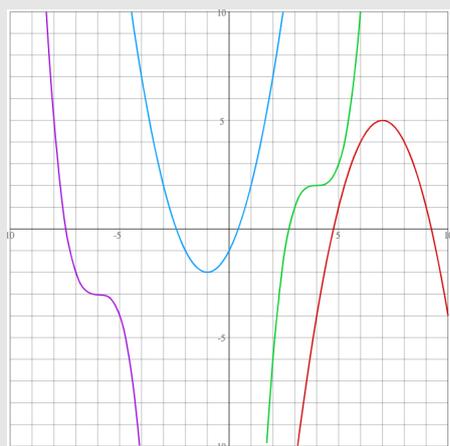
“Estoy entre aquella gente que piensa que la ciencia tiene una gran belleza. Un/a científico/a en su laboratorio no es sólo una persona técnica: también es un niño/a ante fenómenos naturales que le impresionan como en un cuento de hadas”. Marie Curie

1 Ejercicios

(NO OLVIDAR HACER EJERCICIOS de los PPTs)

1.a Identificación de formas

Problema 1. Identifica las siguientes formas (cuadráticas, cúbicas o raíces), cuál son los movimientos que se realizaron desde sus formas basales y cuál es la expresión final de cada función.

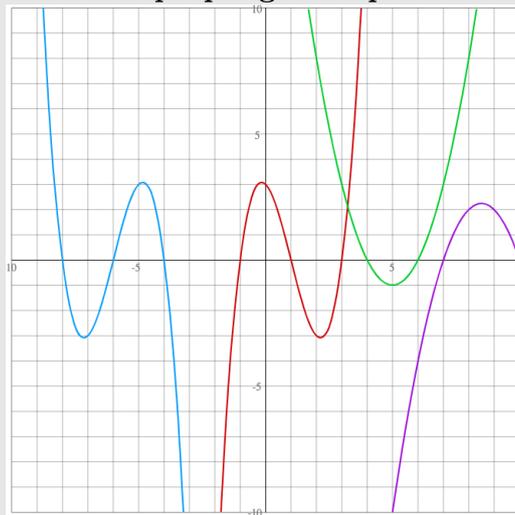


Problema 2. Movimientos de curvas

1. Dada la curva cuadrática $y = x^2$, trasládala 5 unidades hacia arriba y 2 unidades a la derecha.
2. Dada la curva cuadrática $y = (x - 3)^2$, trasládala 3 unidades hacia arriba y 3 unidades a la izquierda.
3. Dada la curva cúbica $y = x^3$, trasládala 4 unidades hacia abajo y 1 unidad a la derecha.
4. Dada la curva cúbica $y = (x+2)^3$, trasládala 2 unidades hacia arriba y 5 unidades a la izquierda.
5. Dada la función de valor absoluto $y = |x|$, trasládala 3 unidades hacia arriba y 2 unidades a la derecha.
6. Dada la función de valor absoluto $y = |x+5|$, trasládala 1 unidad hacia arriba y 4 unidades a la izquierda.
7. Dada la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$, trasládala 2 unidades hacia arriba y 3 unidades a la derecha.
8. Dada la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x-4}$, trasládala 4 unidades hacia abajo y 2 unidades a la izquierda.
9. Dada la combinación $y = x^2 + |x - 3|$, trasládala 3 unidades hacia arriba y 1 unidad a la derecha.
10. Dada la combinación $y = \sqrt{x} + x^3$, trasládala 2 unidades hacia abajo y 3 unidades a la izquierda.
11. Dada la curva cuadrática $y = (x + 1)^2$, trasládala 6 unidades hacia arriba y 2 unidades a la derecha.
12. Dada la curva cúbica $y = (x - 2)^3 - 1$, trasládala 2 unidades hacia arriba y 4 unidades a la izquierda.
13. Dada la función de valor absoluto $y = |x - 2|$, trasládala 5 unidades hacia arriba y 3 unidades a la derecha.
14. Dada la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x+3}$, trasládala 3 unidades hacia abajo y 1 unidad a la izquierda.

1.b Polinomios

Problema 3. Según las raíces proponga una posible función polinomial



Problema 4. Bosqueje los siguientes polinomios. Primero factorice para encontrar las raíces.

1. $P_1(x) = x^2 - 4x + 4$

2. $P_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

3. $P_5(x) = -x^3 + 4x = -x(x^2 - 4)$

Problema 5. Multiplicación de Polinomios

1. $(x + 2)$ por $(x - 3)$.

2. $(x - 4)(x + 5)$.

3. $(2x + 3)(3x - 2)$.

4. $(x^2 + x + 1)(x - 1)$.

5. $(3x - 4)(2x^2 + x + 5)$.

6. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

7. $(2x - 3)(2x + 3)$.

8. $(x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 1)$.

9. $(x - 5)(x + 5)(x - 3)$.

10. $(3x^2 - 2x + 1)(x^2 + x - 1)$.

Problema 6. División de polinomios

1. $x^3 - 3x^2 + x + 5$ por $x - 1$.

2. $2x^4 - 9x^3 + 13x^2 - 6x + 8$ por $x - 2$.

3. $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x - 7$ por $x^2 + 1$.

4. $3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x - 6$ por $x + 1$.

5. $4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 2x + 5$ por $2x - 1$.

6. $x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ por $x - 1$.

7. $5x^3 - 4x^2 + 7x - 8$ por $x + 2$.

8. $2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x - 5$ por $x^2 - x + 1$.

9. $x^4 - 1$ por $x^2 + 1$.

10. $6x^4 - 11x^3 + 8x^2 - 5x + 2$ por $2x - 1$.

Problema 7. Encuentra el valor de k para que el número dado sea una raíz del polinomio correspondiente.

1. $P(x) = x^2 - kx + 9$. Determina k si $x = 3$ es una raíz.

2. $Q(x) = x^3 + 2x^2 - kx - 12$. Determina k si $x = -3$ es una raíz.

3. $R(x) = kx^2 - 4x + 4$. Determina k si $x = 2$ es una raíz.

4. $S(x) = 3x^3 - 15x + k$. Determina k si $x = 0$ es una raíz.

1.c Sumatorias

Problema 8. Encuentra las siguientes sumatorias, considere n un número natural

1. Calcula $\sum_{i=1}^n 1$.
2. Calcula $\sum_{i=1}^{100} i$.
3. Calcula $\sum_{i=1}^n i$.
4. Calcula $\sum_{i=1}^n i^2$.
5. Determina $\sum_{i=1}^{50} (2i - 1)$.
6. Encuentra $\sum_{i=1}^n (3i + 4)$.
7. Evalúa $\sum_{i=1}^n (2^i)$.

Problema 9. Sumatorias combinadas

1. Calcula $\sum_{i=1}^n (2i + 3)$.
2. Calcula $\sum_{i=1}^{50} (i^2 + i + 1)$.
3. Determina $\sum_{i=1}^{100} (2i^2 + 2i)$.
4. Encuentra $\sum_{i=1}^n (i^2 + 3i + 2)$.
5. Evalúa $\sum_{i=1}^n (3i^2 + 5)$.
6. Calcula $\sum_{i=1}^{20} (5i^2 + 5i + 5)$.

Problema 10. Sumas Geométricas

1. Calcular la suma de la serie geométrica $\sum_{i=1}^8 2^i$.
2. Determinar $\sum_{i=1}^n 5^i$, donde n es un número natural.

2 Solucionario

2.a Identificación

Solución 1. Movimiento de curvas

$$\begin{array}{ll} f(x) = -(x-7)^2 + 5 & f(x) = \sqrt{(x+6)} - 5 \\ g(x) = (x+1)^2 - 2 & g(x) = \sqrt{(x)} + 4 \\ h(x) = (x-4)^3 + 2 & h(x) = -(x+5)^2 + 5 \\ i(x) = -(x+6)^3 - 3 & i(x) = -\sqrt{(x-4)} + 4 \end{array}$$

Solución 2. Movimientos de curvas

$$\begin{array}{ll} 1. y = (x-2)^2 + 5 & 9. y = (x-1)^2 + |x-4| + 3 \\ 2. y = (x+3)^2 + 3 & 10. y = \sqrt{x+3} + (x+3)^3 - 2 \\ 3. y = (x-1)^3 - 4 & 11. y = (x-1)^2 + 6 \\ 4. y = (x-5)^3 + 2 & 12. y = (x+6)^3 + 2 - 1 \\ 5. y = |x-2| + 3 & 13. y = |x-5| + 5 \\ 6. y = |x+9| + 1 & 14. y = \sqrt{x+4} - 3 \\ 7. y = \sqrt{x-3} + 2 & \\ 8. y = \sqrt{x+6} - 4 & \end{array}$$

2.b Polinomios

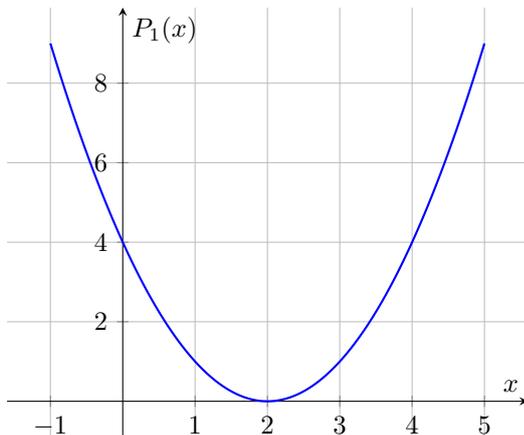
Solución 3. Según las raíces proponga una posible función polinomial 2

$$\begin{array}{l} f(x) = (x+1)(x-3)(x-1) \\ g(x) = -(x+8)(x+6)(x+4) \\ h(x) = (x-6)(x-4) \\ i(x) = -(x-7)(x-10) \end{array}$$

Solución 4. Bosqueje

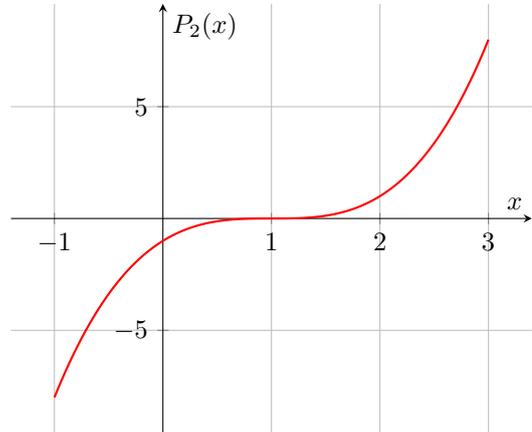
1. $P_1(x) = x^2 - 4x + 4$

Gráfica de $P_1(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$



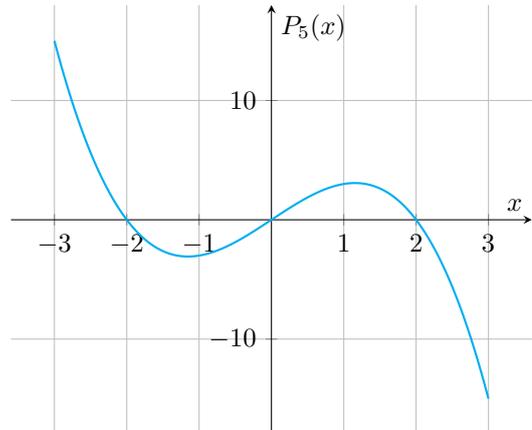
2. Polinomio $P_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$

Gráfica de $P_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$



3. Polinomio $P_5(x) = -x^3 + 4x = -x(x-2)(x+2)$

Gráfica de $P_5(x) = -x^3 + 4x$



Solución 5. Multiplicación de Polinomios

$$\begin{array}{ll} 1. x^2 - x - 6 & 6. x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ 2. x^2 + x - 20 & 7. 4x^2 - 9 \\ 3. 6x^2 + 4x - 6 & 8. x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3 \\ 4. x^3 - 1 & 9. x^3 - 3x^2 - 28x + 75 \\ 5. 6x^3 - 13x^2 - 11x + 20 & 10. 3x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

Solución 6. División de polinomios

1.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x - 1 \\
 x - 1 \overline{) \quad x^3 - 3x^2 + x + 5} \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 -2x^2 + x \\
 \underline{2x^2 - 2x} \\
 -x + 5 \\
 \underline{x - 1} \\
 4
 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 5x^2 + 3x \\
 x - 2 \overline{) \quad 2x^4 - 9x^3 + 13x^2 - 6x + 8} \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3} \\
 -5x^3 + 13x^2 \\
 \underline{5x^3 - 10x^2} \\
 3x^2 - 6x \\
 \underline{-3x^2 + 6x} \\
 8
 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 5x + 1 \\
 x^2 + 1 \overline{) \quad x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x - 7} \\
 \underline{-x^5 - x^3} \\
 -5x^3 + x^2 + 3x \\
 \underline{5x^3 + 5x} \\
 x^2 + 8x - 7 \\
 \underline{-x^2 - 1} \\
 8x - 8
 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r}
 3x^3 + 2x^2 - 4x + 11 \\
 x + 1 \overline{) \quad 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x - 6} \\
 \underline{-3x^4 - 3x^3} \\
 2x^3 - 2x^2 \\
 \underline{-2x^3 - 2x^2} \\
 -4x^2 + 7x \\
 \underline{4x^2 + 4x} \\
 11x - 6 \\
 \underline{-11x - 11} \\
 -17
 \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 3x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} \\
 2x - 1 \overline{) \quad 4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 2x + 5} \\
 \underline{-4x^4 + 2x^3} \\
 -6x^3 + 8x^2 \\
 \underline{6x^3 - 3x^2} \\
 5x^2 - 2x \\
 \underline{-5x^2 + \frac{5}{2}x} \\
 \frac{1}{2}x + 5 \\
 \underline{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}} \\
 \frac{21}{4}
 \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 3x - 2 \\
 x - 1 \overline{) \quad x^3 + 2x^2 - 5x + 2} \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 3x^2 - 5x \\
 \underline{-3x^2 + 3x} \\
 -2x + 2 \\
 \underline{2x - 2} \\
 0
 \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{r}
 5x^2 - 14x + 35 \\
 x + 2 \overline{) \quad 5x^3 - 4x^2 + 7x - 8} \\
 \underline{-5x^3 - 10x^2} \\
 -14x^2 + 7x \\
 \underline{14x^2 + 28x} \\
 35x - 8 \\
 \underline{-35x - 70} \\
 -78
 \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - x^2 + x + 1 \\
 x^2 - x + 1 \overline{) \quad 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x - 5} \\
 \underline{-2x^5 + 2x^4 - 2x^3} \\
 -x^4 + 2x^3 - x^2 \\
 \underline{x^4 - x^3 + x^2} \\
 x^3 + 2x \\
 \underline{-x^3 + x^2 - x} \\
 x^2 + x - 5 \\
 \underline{-x^2 + x - 1} \\
 2x - 6
 \end{array}$$

9.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 1 \\
 x^2 + 1 \overline{) \quad x^4 - 1} \\
 \underline{-x^4 - x^2} \\
 -x^2 - 1 \\
 \underline{x^2 + 1} \\
 0
 \end{array}$$

10.

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 4x^2 + 2x - \frac{3}{2} \\
 2x - 1 \overline{) \quad 6x^4 - 11x^3 + 8x^2 - 5x + 2} \\
 \underline{-6x^4 + 3x^3} \\
 -8x^3 + 8x^2 \\
 \underline{8x^3 - 4x^2} \\
 4x^2 - 5x \\
 \underline{-4x^2 + 2x} \\
 -3x + 2 \\
 \underline{3x - \frac{3}{2}} \\
 \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Solución 7. Encuentra el valor de k para que el número dado sea una raíz del polinomio correspondiente.

1. Sustituir $x = 3$ en $P(x)$:

$$\begin{aligned} P(3) &= 3^2 - 3k + 9 = 0 \\ \implies 18 - 3k &= 0 \\ \implies k &= 6 \end{aligned}$$

2. Sustituir $x = -3$ en $Q(x)$:

$$\begin{aligned} Q(-3) &= (-3)^3 + 2(-3)^2 - k(-3) - 12 = 0 \\ \implies -27 + 18 + 3k - 12 &= 0 \\ \implies 3k = 21 &\implies k = 7 \end{aligned}$$

3. Sustituir $x = 2$ en $R(x)$:

$$\begin{aligned} R(2) &= k(2)^2 - 4(2) + 4 = 0 \\ \implies 4k - 8 + 4 &= 0 \\ \implies 4k = 4 &\implies k = 1 \end{aligned}$$

4. Sustituir $x = 0$ en $S(x)$:

$$\begin{aligned} S(0) &= 3(0)^3 - 15(0) + k = 0 \\ \implies k &= 0 \end{aligned}$$

2.c Sumatorias

Solución 8. Encuentra las siguientes sumatorias, considere siempre n un número natural.

- La suma de n unos es simplemente n .
- La suma de los primeros 100 números naturales es $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$.
- La suma de los primeros n números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$.

- La suma de los cuadrados de los primeros n números naturales es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- La suma de los primeros 50 impares es $50^2 = 2500$.
- La suma de $3i + 4$ desde $i = 1$ hasta n es $3 \frac{n(n+1)}{2} + 4n = \frac{3n(n+1)+8n}{2} = \frac{3n^2+11n}{2}$.
- La suma de las potencias de 2 desde 2^1 hasta 2^n es $2^{n+1} - 2$.

Solución 9. Sumatorias combinadas

- La suma de $2i + 3$ desde $i = 1$ hasta n es $2 \sum_{i=1}^n i + 3n = 2 \frac{n(n+1)}{2} + 3n = n^2 + 4n$.
- La suma de $i^2 + i + 1$ desde $i = 1$ hasta 50 es $\sum_{i=1}^{50} i^2 + \sum_{i=1}^{50} i + \sum_{i=1}^{50} 1 = \frac{50(51)(101)}{6} + \frac{50 \times 51}{2} + 50 = 44.250$.
- La suma de $2i^2 + 2i$ desde $i = 1$ hasta 100 es $2 \sum_{i=1}^{100} i^2 + 2 \sum_{i=1}^{100} i = 2 \frac{100(101)(201)}{6} + 2 \frac{100 \times 101}{2} = 703500$.
- La suma de $i^2 + 3i + 2$ desde $i = 1$ hasta n es $\sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + 2n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \frac{n(n+1)}{2} + 2n = \frac{n(2n^2+9n+13)}{6}$.
- La suma de $3i^2 + 5$ desde $i = 1$ hasta n es $3 \sum_{i=1}^n i^2 + 5n = 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5n = \frac{n(3n^2+3n+10)}{2}$.
- La suma de $5i^2 + 5i + 5$ desde $i = 1$ hasta 20 es $5 \sum_{i=1}^{20} i^2 + 5 \sum_{i=1}^{20} i + 5 \times 20 = 5 \frac{20(21)(41)}{6} + 5 \frac{20 \times 21}{2} + 100 = 28700$.

Solución 10. Sumas Geométricas

- Aplicando esto, $\sum_{i=1}^8 2^i = \frac{1(2^9-2)}{2-1} = 510$.
- Usando la fórmula para la suma de una serie geométrica: $\sum_{i=1}^n 5^i = -\frac{5(1-5^n)}{4}$.