Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Agronómicas
Escuela de Pregrado

Cátedra 3 - Matemáticas I

Profesores:
Carrasco - Contreras - Da Silva

Fecha: Jueves 4 de Julio 2024

Indicaciones

- Ingrese sus datos personales en todas las hojas.
- Esta evaluación está diseñada para ser respondida en x minutos.
- Utilice sólo lápiz pasta. Si utiliza lápiz a mina pierde el derecho a re-corrección, las que pueden alterar el puntaje ya sea aumentándolo o reduciéndolo.
- Todas las respuestas deben ser justificadas paso a paso. Preguntas incompletas o sin justificación serán evaluadas con menor puntaje.
- Todos los dispositivos electrónicos (teléfono celular, Tablet, reloj inteligente, etc.) deben estar apagados y guardados en su mochila.
- Se considerará una actitud deshonesta ser sorprendido mirando la evaluación de otra persona, interactuando con otra persona (conversando, gesticulando, etc.) o en posesión de una fuente de información no autorizada
- El ESTUCHE no debe estar sobre la mesa de trabajo. Sólo los útiles necesarios para desarrollar la evaluación.

Nombre Completo: ______________________________

Rut: ______________________________

Tener Presente: Todo acto realizado por un estudiante durante una evaluación, tendiente a viciarla, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad evaluativa y con la calificación mínima (1.0) en ella.

Firma: ______________________________

Pregunta	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos	10	10	14	18	0	8	60
Puntos extra	2	0	0	4	5	0	11
Puntos obtenidos							

1. Derive las siguientes funciones

   (a) (2 puntos) $f_1(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4$

   Respuesta: Se usa la suma de derivadas y derivada de una potencia. $f_1'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 2x$

   (b) (2 puntos) $f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $f_3'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$

   Respuesta:

   Aplicar la regla del cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - g'\cdot f}{g^2}$

   Se desarrolla

$$= \frac{\frac{d}{dx}(x+1)(x-1) - \frac{d}{dx}(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}(x+1) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x-1) = 1$$

$$= \frac{1\cdot(x-1) - 1\cdot(x+1)}{(x-1)^2}$$

   Simplificar $\frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x+1)}{(x-1)^2}$: $\quad -\frac{2}{(x-1)^2}$

$$= -\frac{2}{(x-1)^2}$$

   (c) (3 puntos) $f_{11}(x) = xe^x$ Respuesta:

$$\frac{d}{dx}(xe^x)$$

   Aplicar la regla del producto: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

$$f = x, g = e^x$$

$$= \frac{dx}{dx}e^x + \frac{d}{dx}(e^x)\,x$$

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$= 1\cdot e^x + e^x x$$

   Simplificar

$$= e^x + x\ e^x$$

(d) (3 puntos) $h(x) = \sin(x^2)$
Respuesta:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^2\right)\right)$$

Aplicar la regla de la cadena: $\cos\left(x^2\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$

$$= \cos\left(x^2\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$
$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$$
$$= 2x\ \cos\left(x^2\right)$$

(e) (2 puntos extra) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$
Respuesta:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)$$

Aplicar la regla de la cadena: $\frac{1}{x^2+1}\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$

$$= \frac{1}{x^2+1}\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$$
$$\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right) = 2x$$
$$= \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x$$

Simplificar $\frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

$$= \frac{2x}{x^2+1}$$

2. Chequee que los siguientes límites cumplen con las hipótesis (condiciones) para usar la regla de L'Hôpital y resuélvalos.

(a) (5 puntos) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$

Respuesta:

Primero, se comprueba si se puede aplicar L'Hôpital. Evaluamos la función en el límite indicado $x = 0$.

$$\left.\frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}\right|_{x=0} = \frac{e^0 - e^{-0}}{\sin(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Se confirma que es un caso de $\frac{0}{0}$. Se puede aplicar L'Hôpital. $\lim_{x\to 0}(\frac{f}{g}) = \lim_{x\to 0}(\frac{f'}{g'})$

Aplicar la regla de L'Hopital: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{\cos(x)}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)}\right)$$

Sustituir la variable

$$= \frac{e^0 + e^{-0}}{\cos(0)}$$

Simplificar $\frac{e^0+e^{-0}}{\cos(0)} = \frac{1+1}{1}$

$$= 2$$

(b) (5 puntos) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

Primero, verificamos si podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Observamos que tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to 1} (x-1) = 0$$

Dado que tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital, la cual nos dice que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}[\ln(x)]}{\frac{d}{dx}[x-1]}$$

Calculamos las derivadas del numerador y del denominador:

$$\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}[x-1] = 1$$

Entonces, el límite se convierte en:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x}$$

Finalmente, evaluamos el límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

3. Rectas tangentes

(a) A la curva $f(x) = e^x$ en el punto $x = 0$.

I. (4 puntos) Encontrar la ecuación de la recta tangente.

La ecuación de la recta tangente a una curva en un punto $x = a$ está dada por:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Primero, evaluamos la función $f(x)$ en $x = 0$:

$$f(0) = e^0 = 1$$

A continuación, necesitamos encontrar la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Evaluamos la derivada en $x = 0$:

$$f'(0) = e^0 = 1$$

Ahora, podemos escribir la ecuación de la recta tangente usando $a = 0$, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 1 = 1(x - 0)$$

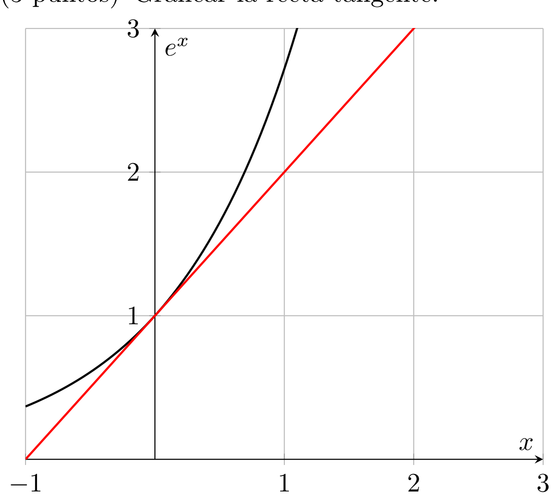
$$y - 1 = x$$

$$y = x + 1$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = e^x$ en el punto $x = 0$ es:

$$y = x + 1$$

II. (3 puntos) Graficar la recta tangente.



(b) A la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 1$

i. (4 puntos) Encontrar la ecuación de la recta tangente. Queremos encontrar la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $x = 1$.
La ecuación de la recta tangente a una curva en un punto $x = a$ está dada por:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Primero, evaluamos la función $f(x)$ en $x = 1$:

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

A continuación, necesitamos encontrar la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Evaluamos la derivada en $x = 1$:

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

Ahora, podemos escribir la ecuación de la recta tangente usando $a = 1$, $f(1) = 1$ y $f'(1) = -1$:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

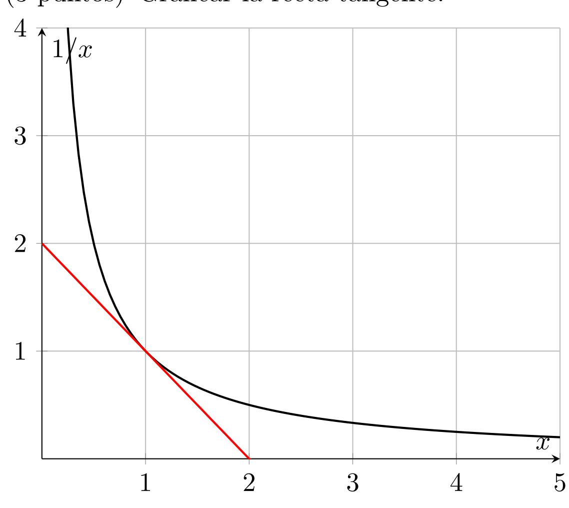
$$y - 1 = -x + 1$$

$$y = -x + 2$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto $x = 1$ es:

$$y = -x + 2$$

ii. (3 puntos) Graficar la recta tangente.



4. (a) Analiza la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ en el intervalo $[-1, 3]$. Determina:

   I. (3 puntos) Los Puntos críticos
   Respuesta:
   Para encontrar los puntos críticos de $f(x)$, primero debemos encontrar su derivada y luego igualarla a cero para hallar los valores de x que la anulan.
   Primero, calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 4) = 3x^2 - 6x$$

   Ahora, igualamos la derivada a cero para encontrar los puntos críticos:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

   Factorizamos la ecuación:

$$3x(x-2) = 0$$

   Esto nos da dos Puntos Críticos:

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 2$$

   II. (3 puntos) Los intervalos crecientes y decrecientes (tabla de signos)
   Respuesta:
   Tabla de signos de $f'(x) = 3x(x-2)$:

$x \in$	$[-1, 0[$	0	$]0, 2[$	2	$]2, 3]$
x	$-$	0	$+$	2	$+$
$(x-2)$	$-$	-2	$-$	0	$+$
$3x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$

   Intervalos crecientes: $(-1, 0) \cup (2, 3)$
   Intervalo decreciente: $(0, 2)$

   III. (3 puntos) Los máximos y mínimos absolutos y locales
   Respuesta:
   - Máximo relativo en $x = 0$, con $f(0) = 4$
   - Mínimo relativo en $x = 2$, con $f(2) = 0$
   - Mínimo relativo en el borde inferior $f(-1) = 0$
   - Máximo relativo en el borde superior $f(3) = 4$.

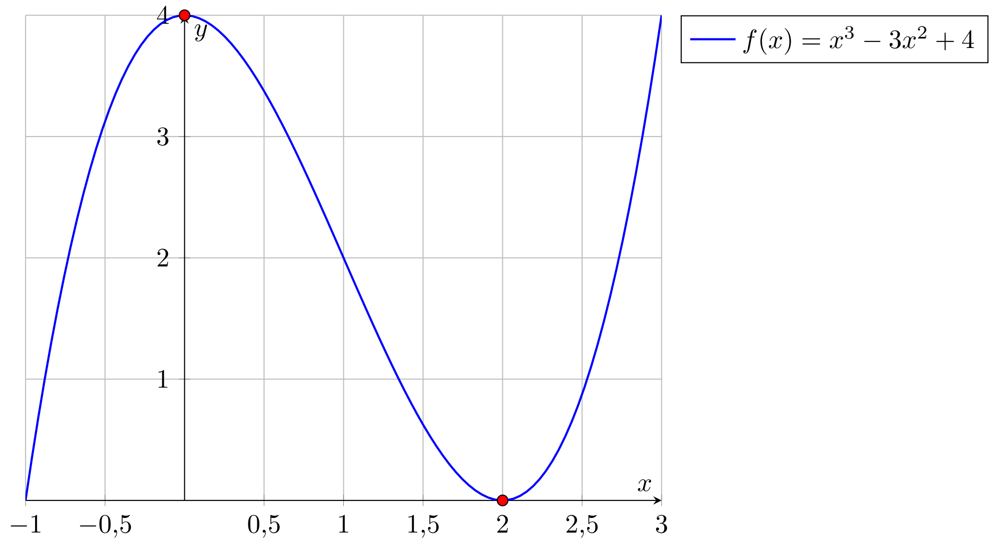
   NO hay máximos ni mínimos absolutos en este intervalo.

   IV. (2 puntos extra) Concavidad y puntos de inflexión. Concavidad:
   - Segunda derivada: $f''(x) = 6x - 6$
   - Raíces de la segunda derivada: $x = 1$
   - Tabla de signos de $f''(x)$:

x	$-\infty$	1	∞
$f''(x)$	-	0	$+$

   - Concavidad hacia abajo: $(-\infty, 1)$
   - Concavidad hacia arriba: $(1, \infty)$
   - Punto de inflexión en $x = 1$

V. (2 puntos extra) Usando la información obtenida, grafique la función



(b) Analiza la función $f(x) = x^2e^{-x}$ en el intervalo $[0, 4]$.

I. (3 puntos) Los Puntos críticos

Para encontrar los puntos críticos, primero calculamos la derivada de $f(x)$ usando la regla del producto:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2e^{-x}\right) = x^2\frac{d}{dx}(e^{-x}) + e^{-x}\frac{d}{dx}(x^2)$$
$$f'(x) = x^2(-e^{-x}) + e^{-x}(2x)$$
$$f'(x) = -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$$
$$f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 2x)$$
$$f'(x) = e^{-x}x(2 - x)$$

Ahora igualamos la derivada a cero para encontrar los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}x(2 - x) = 0$$

La función exponencial e^{-x} nunca es cero, así que podemos ignorarla y resolver:

$$x(2 - x) = 0$$

Esto nos da dos Puntos Críticos:

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 2$$

II. (3 puntos) Los intervalos crecientes y decrecientes (tabla de signos)

Respuesta:

Ambos puntos críticos se encuentran dentro del dominio. Además, $e^{-x} > 0$

$x \in$	0	$]0, 2[$	2	$]2, 4[$	4
x	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(2 - x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$xe^{-x}(2 - x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$

III. (3 puntos) Los máximos y mínimos absolutos y locales

Respuesta:

Evaluamos la segunda derivada en $x = 0$ y $x = 2$:

$$f''(0) = e^{-0}(2 - 3 \cdot 0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{mínimo local}$$

$$f''(2) = e^{-2}(2 - 3 \cdot 2) = e^{-2}(-4) = -4e^{-2} \quad \Rightarrow \quad \text{máximo local}$$

Por lo tanto, los puntos críticos de la función $f(x) = x^2e^{-x}$ son:

$$x = 0 \quad \text{(mínimo absoluto)}$$

$$x = 2 \quad \text{(máximo absoluto)}$$

5. (5 puntos extra) Encontrar las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, si es que las tiene, de la siguiente función

$$f_1(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$$

Asíntotas Verticales

Las asíntotas verticales ocurren cuando el denominador de la función se aproxima a cero y el numerador no es cero en ese punto. Para $f_1(x)$, el denominador es $x-2$. Igualamos el denominador a cero para encontrar las asíntotas verticales:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Por lo tanto, hay una asíntota vertical en $x = 2$.

Asíntotas Horizontales

Las asíntotas horizontales se determinan observando el comportamiento de la función cuando x tiende a $\pm\infty$.

La función $f_1(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$ es una función racional en la que el grado del numerador (1) es igual al grado del denominador (1). En estos casos, la asíntota horizontal se encuentra dividiendo los coeficientes principales del numerador y del denominador.

Para $f_1(x)$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x+1}{x-2} = \frac{-3}{1} = -3$$

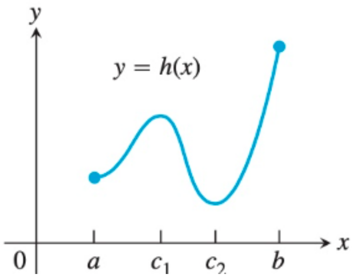
Por lo tanto, hay una asíntota horizontal en $y = -3$.

Conclusión

La función $f_1(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$ tiene:

- Una asíntota vertical en $x = 2$
- Una asíntota horizontal en $y = -3$

6. Determina de la siguiente función $h(x)$



(a) (2 puntos) Puntos críticos
c_1 y c_2 (también se considera correcto incluir a y b).

(b) (2 puntos) Zonas de crecimiento y decrecimiento
Zona creciente $[a, c_1] \cup [c_2, b]$.
Zona decreciente $[c_1, c_2]$

(c) (2 puntos) Máximos y mínimos tanto locales como absolutos
Máximo absoluto b.
Mínimo absiluto c_2.
Máximo local c_1.
Mínimo local a.

(d) (2 puntos) Zonas aproximadas para concavidades.
Cóncava hacia arriba $\cap$ en el intervalo $[a, c_1]$
Cóncava hacia abajo $\cup$ en $[c_1, b]$.
Se aceptaron otras respuestas con justificación.