



Indicaciones

- Ingrese sus datos personales en todas las hojas.
- Esta evaluación está diseñada para ser respondida en x minutos.
- Utilice sólo lápiz pasta. Si utiliza lápiz a mina pierde el derecho a re-corrección, las que pueden alterar el puntaje ya sea aumentándolo o reduciéndolo.
- Todas las respuestas deben ser justificadas paso a paso. Preguntas incompletas o sin justificación serán evaluadas con menor puntaje.
- Todos los dispositivos electrónicos (teléfono celular, Tablet, reloj inteligente, etc.) deben estar apagados y guardados en su mochila.
- Se considerará una actitud deshonesto ser sorprendido mirando la evaluación de otra persona, interactuando con otra persona (conversando, gesticulando, etc.) o en posesión de una fuente de información no autorizada
- El ESTUCHE no debe estar sobre la mesa de trabajo. Sólo los útiles necesarios para desarrollar la evaluación.

Nombre Completo: \_\_\_\_\_

Rut: \_\_\_\_\_

Tener Presente: Todo acto realizado por un estudiante durante una evaluación, tendiente a viciarla, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad evaluativa y con la calificación mínima (1.0) en ella.

Firma: \_\_\_\_\_

Pregunta	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos	12	8	15	4	12	9	60
Puntos extra	2	0	0	0	0	4	6
Puntos obtenidos							

1. Ecuaciones lineales y cuadráticas

Encuentre las soluciones, si las tienen, de las siguientes ecuaciones:

(a) (3 puntos)  $7x - 3 = 2x + 5$

**Solution:**

$$\begin{aligned}7x - 3 &= 2x + 5 \\7x - 2x &= 5 + 3 \\5x &= 8 \\x &= \frac{8}{5} \\x &= 1,6\end{aligned}$$

(b) (3 puntos)  $5x + 10 = 3x - 4$

**Solution:**

$$\begin{aligned}5x + 10 &= 3x - 4 \\5x - 3x &= -4 - 10 \\2x &= -14 \\x &= \frac{-14}{2} \\x &= -7\end{aligned}$$

(c) (3 puntos)  $x^2 + 6x + 9 = 0$

**Solution:**

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 &= 0 \\(x + 3)^2 &= 0 \\x + 3 &= 0 \\x &= -3\end{aligned}$$

(d) (3 puntos)  $x^2 - 25 = 0$

**Solution:**

$$\begin{aligned}x^2 - 25 &= 0 \\(x - 5)(x + 5) &= 0 \\x - 5 &= 0 \quad \text{or} \quad x + 5 &= 0 \\x = 5 \quad \text{or} \quad x &= -5\end{aligned}$$

(e) (2 puntos extra)  $3x^2 - 7x + 2 = 0$

**Solution:** Usamos la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas,  $ax^2 + bx + c = 0$ :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquí,  $a = 3$ ,  $b = -7$  y  $c = 2$ .

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{6}$$

Entonces, las soluciones son:

$$x = \frac{7 + 5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x = \frac{7 - 5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2. Trigonometría

- (a) (4 puntos) Un árbol proyecta una sombra de 30 metros cuando el ángulo de elevación del sol es de  $45^\circ$ . ¿Cuál es la altura del árbol?

**Solution:**

Para encontrar la altura del árbol, utilizamos la relación trigonométrica de la tangente en un triángulo rectángulo:

$$\tan(\theta) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

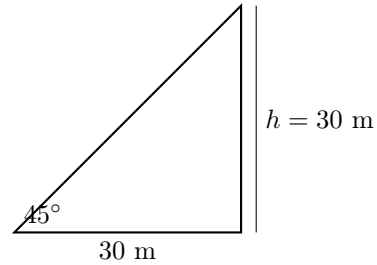
En este caso,  $\theta = 45^\circ$ , la longitud de la sombra es la longitud del lado adyacente (30 metros) y la altura del árbol es la longitud del lado opuesto. Entonces:

$$\tan(45^\circ) = \frac{h}{30}$$

Sabemos que  $\tan(45^\circ) = 1$ , por lo tanto:

$$1 = \frac{h}{30} \implies h = 30 \text{ metros}$$

La altura del árbol es de 30 metros.



- (b) (4 puntos) Un agricultor quiere medir la altura de un silo utilizando un teodolito. Desde un punto a 50 metros del silo, el ángulo de elevación al tope del silo es de  $30^\circ$ . ¿Cuál es la altura del silo?

**Solution:**

Para encontrar la altura del silo, utilizamos la relación trigonométrica de la tangente en un triángulo rectángulo:

$$\tan(\theta) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

En este caso,  $\theta = 30^\circ$ , la distancia desde el punto de observación hasta el silo es la longitud del lado adyacente (50 metros) y la altura del silo es la longitud del lado opuesto. Entonces:

$$\tan(30^\circ) = \frac{h}{50}$$

Sabemos que  $\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , por lo tanto:

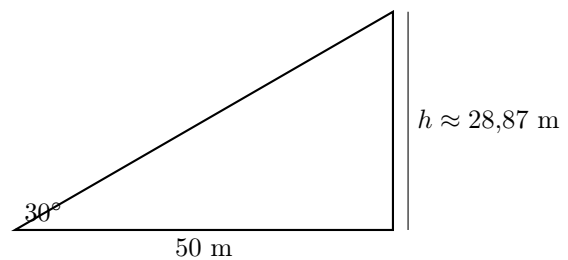
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{h}{50} \implies h = 50 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \implies h &= \frac{50}{\sqrt{3}} \implies h = \frac{50\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Lo que sigue no es necesario, pues es sin calculadora.

Aproximando,  $\sqrt{3} \approx 1,732$ , entonces:

$$h \approx \frac{50 \cdot 1,732}{3} \approx 28,87 \text{ metros}$$

La altura del silo es aproximadamente 28.87 metros.



3. Límites

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

I. (1 punto) ¿Es una forma indeterminada?. ¿Por qué?

**Solution:** Sí, es una forma indeterminada. Al evaluar directamente el límite en  $x = 1$ , obtenemos:

$$\frac{1-1}{1^2-1} = \frac{0}{0}$$

La expresión  $\frac{0}{0}$  es una forma indeterminada.

II. (1 punto) Qué método usará para resolverlo.

**Solution:** Usaremos el método de factorización y simplificación para resolver el límite.

III. (3 puntos) Calcule.

**Solution:** Primero, factorizamos el denominador  $x^2 - 1$ :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Entonces, el límite se convierte en:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

Podemos simplificar  $\frac{x-1}{x-1} = 1$  (para  $x \neq 1$ ):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}$$

Ahora evaluamos el límite:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

I. (1 punto) ¿Es una forma indeterminada?. ¿Por qué?

**Solution:** Sí, es una forma indeterminada. Al evaluar directamente el límite en  $x = 2$ , obtenemos:

$$\frac{2-2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$

La expresión  $\frac{0}{0}$  es una forma indeterminada.

II. (1 punto) ¿Qué método usará para resolverlo?

**Solution:** Usaremos la racionalización para resolver el límite.

III. (3 puntos) Calcule.

**Solution:** Racionalizamos el denominador multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

Simplificamos el denominador utilizando la identidad de la diferencia de cuadrados:

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2}$$

Simplificamos el factor común  $x-2$ :

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} + \sqrt{2}$$

Evaluamos el límite:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$

I. (1 punto) ¿Es una forma indeterminada?. ¿Por qué?

**Solution:** Sí, es una forma indeterminada. Al evaluar directamente el límite en  $x = 1$ , obtenemos:

$$\frac{\ln(1)}{1-1} = \frac{0}{0}$$

La expresión  $\frac{0}{0}$  es una forma indeterminada.

II. (1 punto) ¿Qué método usará para resolverlo?

**Solution:** Usaremos la regla de L'Hôpital para resolver el límite, ya que se trata de una forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ .

III. (3 puntos) Calcule.

**Solution:** Aplicamos la regla de L'Hôpital, que nos dice que si tenemos una forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ , podemos derivar el numerador y el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx}[\ln(x)]}{\frac{d}{dx}[x-1]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1}$$

Evaluamos el límite:

$$\frac{1}{1} = 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

#### 4. Derivadas

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(a) (1 punto)  $f_1(x) = \frac{5}{x^5}$

**Solution:** Reescribimos la función como una potencia:

$$f_1(x) = 5x^{-5}$$

Aplicamos la regla de la potencia para derivar:

$$f_1'(x) = 5 \cdot (-5)x^{-6} = -25x^{-6} = -\frac{25}{x^6}$$

(b) (1 punto)  $f_2(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

**Solution:** Utilizamos la regla del producto para derivar:

$$f_2'(x) = \sin(x) \cdot \frac{d}{dx}[\cos(x)] + \cos(x) \cdot \frac{d}{dx}[\sin(x)]$$

Sabemos que  $\frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\sin(x)$  y  $\frac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x)$ , por lo tanto:

$$f_2'(x) = \sin(x) \cdot (-\sin(x)) + \cos(x) \cdot \cos(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x)$$

(c) (1 punto)  $f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}$

**Solution:** Utilizamos la regla del cociente para derivar:

$$f_3'(x) = \frac{(x-1) \cdot \frac{d}{dx}[x+1] - (x+1) \cdot \frac{d}{dx}[x-1]}{(x-1)^2}$$

Sabemos que  $\frac{d}{dx}[x+1] = 1$  y  $\frac{d}{dx}[x-1] = 1$ , por lo tanto:

$$f_3'(x) = \frac{(x-1) \cdot 1 - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

(d) (1 punto)  $f_4(x) = \sin(\cos(x))$

**Solution:** Utilizamos la regla de la cadena para derivar:

$$f_4'(x) = \cos(\cos(x)) \cdot \frac{d}{dx}[\cos(x)]$$

Sabemos que  $\frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\sin(x)$ , por lo tanto:

$$f_4'(x) = \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) = -\sin(x) \cos(\cos(x))$$

5. Rectas tangentes

(a) A la curva  $f(x) = x^2$  en el punto  $x = 1$

i. (4 puntos) Encontrar la ecuación de la recta tangente.

**Solution:** Primero, encontramos la derivada de  $f(x)$ :

$$f'(x) = 2x$$

Evaluamos la derivada en  $x = 1$ :

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

La pendiente de la recta tangente es 2. El punto de tangencia es  $(1, f(1)) = (1, 1^2) = (1, 1)$ . Utilizamos la ecuación punto-pendiente para encontrar la ecuación de la recta tangente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituimos  $m = 2$ ,  $x_1 = 1$ , y  $y_1 = 1$ :

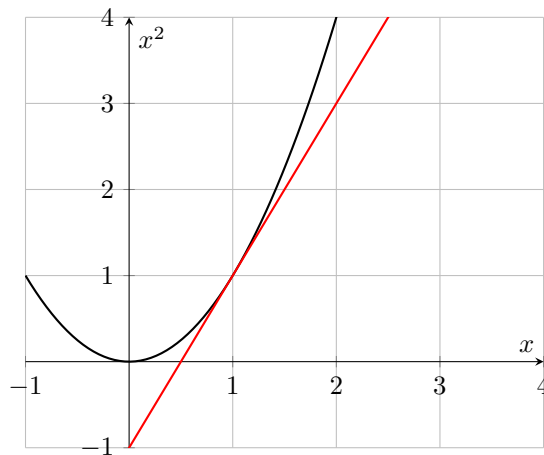
$$y - 1 = 2(x - 1) \implies y = 2x - 2 + 1 \implies y = 2x - 1$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = 2x - 1$$

ii. (2 puntos) Graficar la recta tangente.

**Solution:**





- (b) A la curva  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $x = 1$
- i. (4 puntos) Encontrar la ecuación de la recta tangente.

**Solution:** Primero, encontramos la derivada de  $f(x)$ :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Evaluamos la derivada en  $x = 1$ :

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

La pendiente de la recta tangente es  $-1$ . El punto de tangencia es  $(1, f(1)) = (1, \frac{1}{1}) = (1, 1)$ . Utilizamos la ecuación punto-pendiente para encontrar la ecuación de la recta tangente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituimos  $m = -1$ ,  $x_1 = 1$ , y  $y_1 = 1$ :

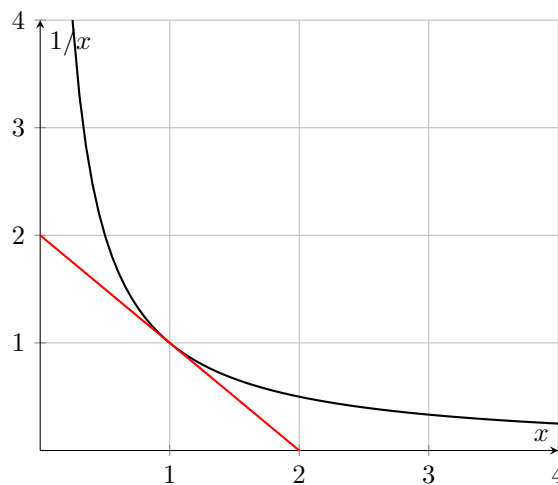
$$y - 1 = -1(x - 1) \implies y = -x + 1 + 1 \implies y = -x + 2$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = -x + 2$$

- ii. (2 puntos) Graficar la recta tangente.

**Solution:**



6. Analiza la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  en el intervalo  $[-1, 3]$ . Determina:

I. (3 puntos) Los Puntos críticos

**Solution:** Primero, encontramos la derivada de  $f(x)$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Para encontrar los puntos críticos, resolvemos  $f'(x) = 0$ :

$$3x^2 - 6x = 0 \implies 3x(x - 2) = 0 \implies x = 0 \quad \text{o} \quad x = 2$$

Evaluamos la función en estos puntos:

$$f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 4 = 4$$

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$$

Por lo tanto, los puntos críticos son 0 y 2.

II. (3 puntos) Los intervalos crecientes y decrecientes (tabla de signos)

**Solution:**

Tabla de signos de  $f'(x) = 3x(x - 2)$ :

$x \in$	$[-1, 0[$	0	$]0, 2[$	2	$]2, 3]$
$x$	-	0	+	2	+
$(x - 2)$	-	-2	-	0	+
$3x(x - 2)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$

Intervalos crecientes:  $(-1, 0) \cup (2, 3)$

Intervalo decreciente:  $(0, 2)$

III. (3 puntos) Los máximos y mínimos absolutos y locales

**Solution:** Evaluamos la función en los extremos del intervalo  $[-1, 3]$  y en los puntos críticos:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$$

$$f(3) = 3^3 - 3(3)^2 + 4 = 27 - 27 + 4 = 4$$

Ya hemos calculado:

$$f(0) = 4 \quad \text{y} \quad f(2) = 0$$

Comparando los valores de  $f(x)$  en estos puntos:

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 4, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = 4$$

El máximo relativo es 4 (en  $x = 0$  y  $x = 3$ ) y el mínimo local es 0 (en  $x = -1$  y  $x = 2$ ).

IV. (2 puntos extra) Concavidad y puntos de inflexión.

**Solution:** Para determinar la concavidad, calculamos la segunda derivada de  $f(x)$ :

$$f''(x) = 6x - 6$$

Resolvemos  $f''(x) = 0$  para encontrar los puntos de inflexión:

$$6x - 6 = 0 \implies x = 1$$

Evaluamos la segunda derivada en intervalos determinados por  $x = 1$ :

$$f''(x) = 6(x - 1)$$

Intervalo	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+

La función es cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 1)$  y cóncava hacia arriba en  $(1, \infty)$ . El punto de inflexión es  $(1, f(1))$ :

$$f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$$

Por lo tanto, el punto de inflexión es  $(1, 2)$ .

v. (2 puntos extra) Usando la información obtenida, grafique la función

