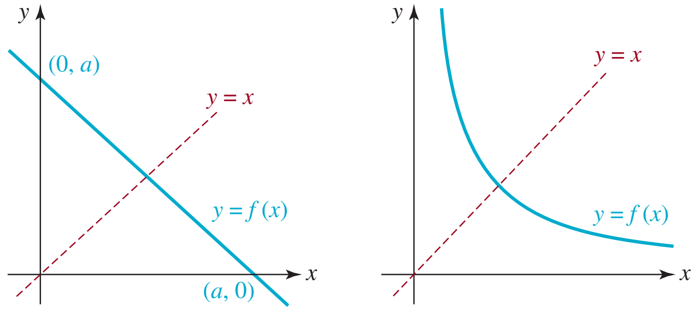

a) *b*)

FIGURA 5.6.17 Gráficas del problema 51

5.7 Traducción de palabras a funciones

Introducción En cursos posteriores habrá casos en los que se espera que usted traduzca las palabras que describen un problema en símbolos matemáticos para desarrollar o deducir una *ecuación* o una *función*.

En esta sección nos centraremos en los problemas con funciones. Comenzaremos con una descripción verbal acerca del producto de dos números.

EJEMPLO 1 Producto de dos números

La suma de dos números no negativos es 15. Expresar el producto de uno con el cuadrado del otro como función de uno de los números.

Solución Primero, representaremos los dos números con los símbolos x y y, recordando que "no negativo" quiere decir que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. La primera frase dice que $x + y = 15$; ésta *no es* la función que buscamos. La segunda frase describe la función que deseamos; se llama "el producto". Representemos "el producto" por el símbolo P. Ahora bien, P es el producto de uno de los números, digamos x, por el cuadrado del otro, esto es, por y^2:

$$P = xy^2. \tag{1}$$

No, todavía no terminamos porque se supone que P es una "función de *uno* de los números". Ahora aprovecharemos que los números x y y se relacionan por $x + y = 15$. De esta última ecuación sustituimos $y = 15 - x$ en la ecuación (1) para obtener el resultado que deseamos:

$$P(x) = x(15 - x)^2. \tag{2}$$

≡

A continuación se presenta un resumen simbólico del análisis del problema del ejemplo 1.

$$\text{La } \overbrace{\text{suma de } \overbrace{\text{dos números no negativos}}^{\text{sean los números } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0} \text{ es 15.}}^{x + y = 15} \text{ Expresar el } \overbrace{\text{producto}}^{P} \text{ con} \tag{3}$$
$$\overbrace{\text{el}}^{x} \ \overbrace{\text{cuadrado del otro}}^{y^2} \text{ como función } \overbrace{\text{de uno de los números.}}^{\text{usar } x}$$

Observe que la segunda frase es vaga, pues no dice cuál número se eleva al cuadrado. Eso quiere decir que, en realidad, eso no importa; la ecuación (1) también podría escribirse como

$P = yx^2$. También, podríamos haber usado $x = 15 - y$ en (1) para llegar a $P(y) = (15 - y)y^2$. En un ambiente de cálculo no hubiera importado si trabajáramos con $P(x)$ o con $P(y)$, porque al determinar *uno* de los números se determina el otro automáticamente, por medio de la ecuación $x + y = 15$. Esta última ecuación se suele llamar **restricción**. Una restricción no sólo define la relación entre las variables x y y, sino con frecuencia establece un límite a la forma en que pueden variar x y y. Como verá en el ejemplo siguiente, la restricción ayuda a determinar el dominio de la función que acabamos de construir.

EJEMPLO 2 Continuación del ejemplo 1

¿Cuál es el dominio de la función $P(x)$ en (2)?

Solución Sin conocer el contexto del planteo del problema en el ejemplo 1, habría que llegar a la conclusión que de acuerdo con la descripción de la página 201, en la sección 5.1, el dominio de la función polinomial cúbica

$$P(x) = x(15 - x)^2 = 225x - 30x^2 + x^3$$

es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. *Pero* en el contexto del problema original, los números deberían ser no negativos. De acuerdo con los requisitos que $x \geq 0$ *y que* $y = 15 - x \geq 0$, se obtienen $x \geq 0$ y $x \leq 15$, lo que quiere decir que x debe satisfacer la desigualdad simultánea $0 \leq x \leq 15$. Si empleamos la notación de intervalos, el dominio de la función producto P de (2) es el intervalo cerrado $[0, 15]$. ≡

Otra forma de ver la conclusión del ejemplo 2 es la siguiente: la restricción $x + y = 15$ establece que $y = 15 - x$. Así, *si* x pudiera ser mayor que 15 (digamos que $x = 17.5$), entonces $y = 15 - x$ sería un número negativo, lo cual contradice la hipótesis inicial de que $y \geq 0$.

Invariablemente, siempre que se analizan problemas planteados en palabras en una clase de matemáticas, los estudiantes reaccionan con quejidos, ambivalencia y desaliento. Aunque no garantizamos nada, las sugerencias siguientes podrían ayudarle a resolver los problemas de los ejercicios 5.7. Estos problemas son especialmente importantes si en sus planes futuros está tomar un curso de cálculo.

GUÍA PARA CREAR UNA FUNCIÓN

i) Por lo menos trate de tener una actitud positiva.

ii) Trate de ser limpio y organizado.

iii) Lea despacio el problema. Luego vuelva a leerlo varias veces más.

iv) Siempre que sea posible, trace una curva o imagen e identifique en él las cantidades dadas en el problema. No complique el dibujo.

v) Si la descripción de la función indica dos variables, por ejemplo, x y y, busque una restricción o relación entre ellas (como $x + y = 15$ en el ejemplo 1). Use la restricción para eliminar una de las variables y expresar la función requerida en términos de una variable.

EJEMPLO 3 Área de un rectángulo

Un rectángulo tiene dos vértices en el eje x y dos vértices en el semicírculo cuya ecuación es $y = \sqrt{25 - x^2}$ [**FIGURA 5.7.1*a***)]. Determine las dimensiones del rectángulo máximo.

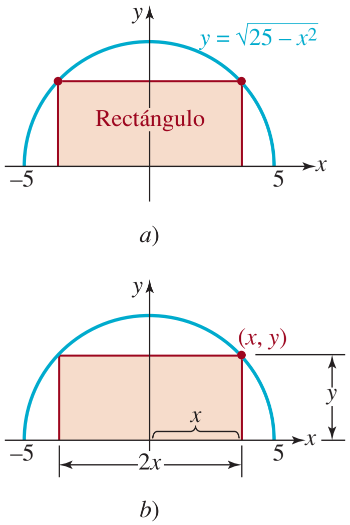

FIGURA 5.7.1 Rectángulo del ejemplo 3

Solución Si (x, y), $x > 0$, $y > 0$ representa el vértice del rectángulo que está en el círculo y en el primer cuadrante, entonces, como se ve en la figura 5.7.1*b*), el área A es largo × ancho, es decir

$$A = (2x) \times y = 2xy. \tag{4}$$

En este problema, la restricción es la ecuación $y = \sqrt{25 - x^2}$ del semicírculo. Usaremos la ecuación de restricción para eliminar y en (4) y obtener el área del rectángulo,

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}, \tag{5}$$ ≡

Si tuviéramos que examinar la función $A(x)$ fuera del contexto del ejemplo 3, su dominio hubiera sido $[-5, 5]$. Como supusimos que $x > 0$, el dominio de $A(x)$ en la ecuación (4) en realidad es el intervalo abierto $(0, 5)$.

EJEMPLO 4 ¿Cuánta cerca?

Un ranchero pretende delimitar un terreno rectangular que tenga 1 000 m^2 de superficie. El terreno será cercado y dividido en dos partes iguales, con una cerca adicional, paralela a dos lados. Calcule las dimensiones del terreno que requieran la cantidad mínima de cerca.

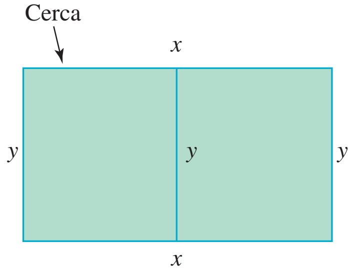

FIGURA 5.7.2 Terreno rectangular del ejemplo 4

Solución El esquema debe ser un rectángulo con una recta en su mitad, similar a lo que se ve en la **FIGURA 5.7.2**. Como muestra la figura, sea $x > 0$ el largo del terreno rectangular, y sea $y > 0$ su ancho. Si el símbolo F representa esta cantidad, la suma de las longitudes de las *cinco* partes (dos horizontales y tres verticales), de la cerca, es

$$F = 2x + 3y \tag{6}$$

Como queremos que F sea una función del largo de un lado del terreno, debemos eliminar x o y de (6). Sin embargo, el terreno cercado debe tener un área de 1 000 m^2, así que x y y deben relacionarse con la restricción $xy = 1\,000$. De acuerdo con esta última ecuación, se obtiene $y = 1\,000/x$, que se puede usar para eliminar y en (6). Por tanto, la cantidad de cerca F en función de x es $F(x) = 2x + 3(1\,000/x)$, es decir,

$$F(x) = 2x + \frac{3\,000}{x}. \tag{7}$$

Como x representa una dimensión física que satisface $xy = 1\,000$, la conclusión es que x es positivo. Pero además de ésa, x no tiene otra restricción. Tenga en cuenta que si el número positivo x se acerca a 0, entonces $y = 1\,000/x$ será muy grande, en tanto que si se considera que x es un número muy grande, entonces y se aproximará a 0. Por consiguiente, el dominio de $F(x)$ es $(0, \infty)$. ≡

Si un problema se relaciona con triángulos, debe estudiarlo detenidamente y determinar si ha de aplicar el teorema de Pitágoras, triángulos semejantes o trigonometría (véase la sección 10.2).

EJEMPLO 5 Escalera más corta

Una pared de 10 pies se halla a 5 pies de distancia de un edificio. Una escalera, apoyada en la pared, toca el edificio como se ilustra en la **FIGURA 5.7.3**. Exprese la longitud de la escalera como una función de x como se muestra en la figura.

Solución Sea L la longitud de la escalera. Con x y y definidos en la figura 5.7.3, se ve que hay dos triángulos rectángulos, que el triángulo mayor tiene tres lados cuyas longitudes son L, y y $x + 5$, y el triángulo menor tiene dos lados cuyas longitudes son x y 10. Ahora bien, la escalera es la hipotenusa del triángulo rectángulo mayor, así que de acuerdo con el teorema de Pitágoras,

$$L^2 = (x + 5)^2 + y^2 \tag{8}$$

Los triángulos rectángulos de la figura 5.7.3 son semejantes, porque ambos tienen un ángulo recto y comparten el ángulo agudo que forma la escalera con el piso. Entonces aprovecharemos que las relaciones de los lados correspondientes son iguales en triángulos correspondientes. Eso nos permite escribir

$$\frac{y}{x + 5} = \frac{10}{x}$$

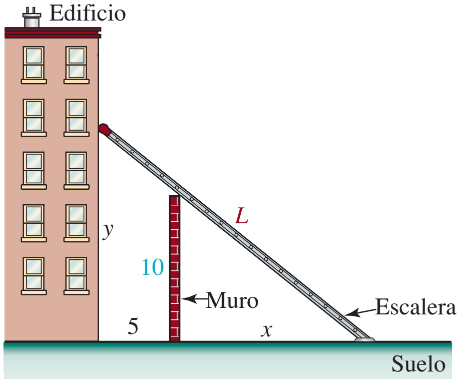

FIGURA 5.7.3 Escalera del ejemplo 5

Despejamos y en términos de x en la última ecuación y obtenemos $y = 10(x + 5)/x$; por tanto, (8) se convierte en

$$\begin{aligned} L^2 &= (x + 5)^2 + \left(\frac{10(x + 5)}{x}\right)^2 \\ &= (x + 5)^2\left(1 + \frac{100}{x^2}\right) && \leftarrow \text{se factoriza } (x + 5)^2 \\ &= (x + 5)^2\left(\frac{x^2 + 100}{x^2}\right) && \leftarrow \text{denominador común} \end{aligned}$$

Se saca la raíz cuadrada para obtener L en función de x:

$$L(x) = \frac{x + 5}{x}\sqrt{x^2 + 100}. \quad \leftarrow \begin{array}{l}\text{la raíz cuadrada de un producto es} \\ \text{el producto de las raíces cuadradas de los factores}\end{array}$$

El dominio de la función $L(x)$ es $(0, \infty)$. ≡

EJEMPLO 6 Distancia a un punto

Exprese la distancia desde un punto (x, y) en el primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 1$ al punto $(2, 4)$ como una función de x.

Solución Sea d la distancia de (x, y) a $(2, 4)$, como se muestra en la **FIGURA 5.7.4**. Entonces, con base en la fórmula de la distancia (2) de la sección 4.1,

$$d = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20}. \tag{9}$$

En este problema, la restricción es la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Con ella se puede sustituir de inmediato $x^2 + y^2$ en (9), por el número 1. Además, usando la restricción para escribir $y = \sqrt{1 - x^2}$ podemos eliminar y en (9). Así, la distancia d en función de x es:

$$d(x) = \sqrt{21 - 4x - 8\sqrt{1 - x^2}}. \tag{10}$$

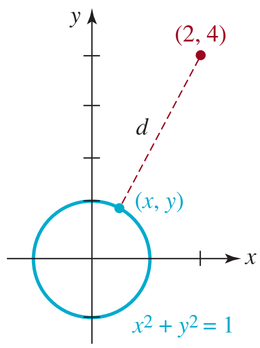

FIGURA 5.7.4 Distancia d en el ejemplo 6

Como (x, y) es un punto del círculo en el primer cuadrante, la variable x puede ir de 0 a 1, esto es, el dominio de la función en (10) es el intervalo cerrado $[0, 1]$. ≡

Notas del aula

No debe pensar que todo problema que requiera el planteamiento de una función a partir de una descripción verbal debe tener una restricción. En los problemas 11 a 16 de los ejercicios 5.7, la función requerida también se puede plantear usando sólo una variable.

5.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas 1 a 40 traduzca las palabras en una función adecuada. Indique el dominio de la función.

1. El producto de dos números positivos es 50. Exprese su suma como función de uno de los números.

2. Exprese la suma de un número distinto de cero y de su recíproco en función del número.

3. La suma de dos números no negativos es 1. Exprese la suma del cuadrado de uno, más el doble del cuadrado del otro, en función de uno de los números.

4. Sean m y n dos enteros positivos. La suma de dos números no negativos es S. Exprese el producto de la m-ésima potencia de uno por la n-ésima potencia del otro en función de uno de los números.

5. El perímetro de un rectángulo es 200 pulg. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

6. La superficie de un rectángulo es de 400 pulg^2. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

7. Exprese el área del rectángulo sombreada de la **FIGURA 5.7.5** en función de x.

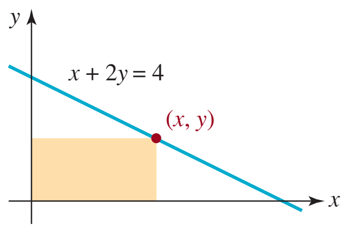

FIGURA 5.7.5 Rectángulo para el problema 7

8. Exprese la longitud del segmento de recta que contiene al punto (2, 4), como se ve en la **FIGURA 5.7.6**, en función de x.

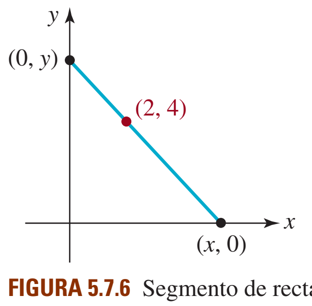

FIGURA 5.7.6 Segmento de recta para el problema 8

9. Exprese la distancia desde un punto (x, y) en la gráfica de $x + y = 1$, al punto (2, 3), como función de x.

10. Exprese la distancia desde un punto (x, y) en la gráfica de $y = 4 - x^2$, al punto (0, 1), en función de x.

11. Exprese el perímetro de un cuadrado en función de su área A.

12. Exprese el área de un círculo en función de su diámetro d.

13. Exprese el diámetro de un círculo en función de su circunferencia C.

14. Exprese el volumen de un cubo en función del área A de su base.

15. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de su altura h.

16. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de la longitud s de uno de sus lados.

17. Un alambre de longitud x se dobla en forma de un círculo. Exprese el área del círculo en función de x.

18. Un alambre de longitud L se corta a x unidades de un extremo. Un trozo del alambre se dobla formando un cuadrado, y la otra parte se dobla para formar un círculo. Exprese la suma de las áreas en función de x.

19. Se planta un árbol a 30 pies de la base de un poste de alumbrado, que tiene 25 pies de altura. Exprese la longitud de la sombra del árbol en función de su altura (**FIGURA 5.7.7**).

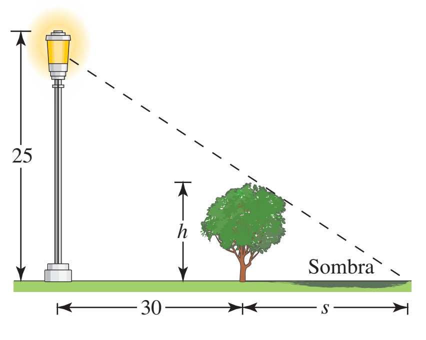

FIGURA 5.7.7 Árbol para el problema 19

20. El armazón de una cometa está formado por seis trozos de plástico ligero. El marco exterior consta de cuatro piezas ya cortadas; dos tienen 2 pies de longitud y dos tienen 3 pies de longitud. Exprese el área de la cometa en función de x, donde $2x$ es la longitud de la pieza transversal que se indica en la **FIGURA 5.7.8**.

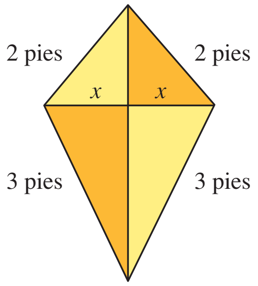

FIGURA 5.7.8 Cometa para el problema 20

21. Una empresa desea construir una caja rectangular abierta, con 450 pulg^3 de volumen, de tal modo que la longitud de su base sea el triple de su ancho. Exprese la superficie de la caja en función del ancho.

22. Un tanque cónico, con su vértice hacia abajo, tiene 5 pies de radio y 15 pies de altura. Al tanque se bombea agua. Exprese el volumen del agua en función de su profundidad. [*Pista:* el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Aunque el tanque es un objeto tridimensional, examine su corte transversal, como triángulo de dos dimensiones]. (**FIGURA 5.7.9**.)

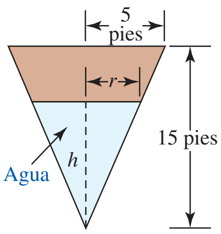

FIGURA 5.7.9 Tanque en forma de cono para el problema 22

23. El automóvil A pasa por el punto O dirigiéndose hacia el este a una velocidad constante de 40 mi/h; el automóvil B pasa por el mismo punto una hora después, con rumbo al norte a una velocidad constante de 60 mi/h. Exprese la distancia entre los vehículos, en función del tiempo t, contando t a partir de cuando el automóvil B pasa por el punto O (**FIGURA 5.7.10**).

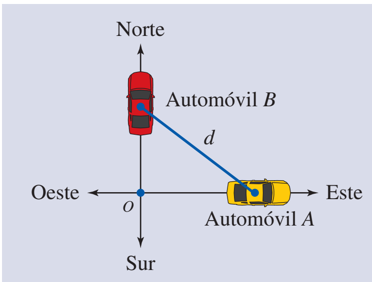

FIGURA 5.7.10 Autos para el problema 23

24. En el momento $t = 0$ (expresado en horas), dos aviones tienen una separación vertical de 1 milla, y se rebasan con direcciones opuestas. Si los aviones vuelan horizontalmente con velocidades de 500 mi/h y 550 mi/h, exprese la distancia horizontal entre ellos en función de t. [*Pista:* distancia = velocidad × tiempo].

25. La alberca de la **FIGURA 5.7.11** tiene 3 pies de profundidad en el extremo bajo, y 8 pies de profundidad en el extremo hondo; tiene 40 pies de longitud y 30 pies de ancho (de los extremos); el fondo forma un plano inclinado. Se bombea agua a la alberca. Exprese el volumen del agua en la alberca en función de la altura h del agua sobre el fondo, en el lado hondo. [*Pista:* el volumen será una función definida en intervalo, y su dominio será $0 \le h \le 8$].

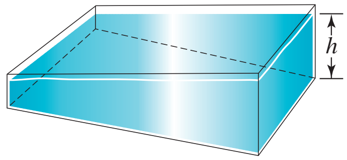

FIGURA 5.7.11 Alberca para el problema 25

26. El reglamento del servicio postal para paquetería estipula que la longitud más el perímetro del extremo de un paquete no debe ser mayor que 108 pulgadas. Exprese el volumen del paquete en función del ancho x, como se indica en la **FIGURA 5.7.12**. [*Pista:* suponga que el largo más el perímetro es igual a 108].

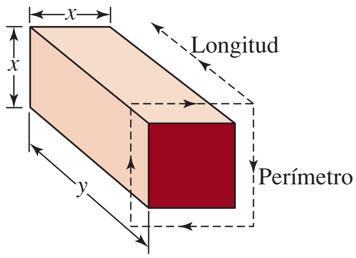

FIGURA 5.7.12 Paquete para el problema 26

27. Considere todos los rectángulos que tienen el mismo perímetro p (en este caso p representa una constante). Exprese el área de un rectángulo como una función de la longitud de un lado.

28. El largo de un rectángulo es x, su altura es y y su perímetro mide 20 pulg. Exprese la longitud de la diagonal del rectángulo como una función del largo x.

29. Un terreno rectangular se va a cercar para limitar tres partes iguales, con dos cercas divisorias paralelas a dos lados. Si el área por encerrar es de 4 000 m^2, calcule las dimensiones del terreno que requieran la mínima cantidad de cerca.

30. Un terreno rectangular se va a cercar para limitar tres partes iguales, con dos cercas divisorias paralelas a dos lados. Si la cerca total que se va a usar es de 8 000 m, calcule las dimensiones del terreno que tenga la máxima área.

31. Un ranchero desea construir un corral rectangular, de 128 000 pies^2 de área, con uno de sus lados a lo largo de un río recto. El cercado a lo largo del río cuesta \$1.50 por pie, mientras que a lo largo de los otros tres lados, cercar cuesta \$2.50 por pie. Calcule las dimensiones del corral, para que el costo de la construcción sea mínimo. [*Pista:* a lo largo del río, el costo de x pies de cerca es de $1.50x$].

32. Exprese el área de la región coloreada del triángulo que se ilustra en la **FIGURA 5.7.13** como una función de x.

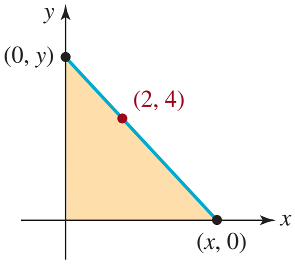

FIGURA 5.7.13 Segmento de recta para el problema 32

33. *a*) Se va a formar una caja rectangular abierta con base cuadrada, y 32 000 cm^3 de volumen. Calcule las dimensiones de la caja que requieran la cantidad mínima de material (**FIGURA 5.7.14**).

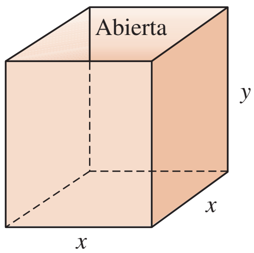

FIGURA 5.7.14 Caja para el problema 33

34. Se va a construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada. El material para la tapa cuesta \$2 por pie cuadrado, mientras que el material para las caras restantes cuesta \$1 por pie cuadrado. Si el costo total para construir cada caja es de \$36, calcule las dimensiones de la caja con mayor volumen que pueda fabricarse.

35. Un canalón pluvial se fabrica con corte transversal rectangular con una pieza metálica de 1 pie × 20 pies, doblando hacia arriba cantidades iguales en el lado de 1 pie. Véase la **FIGURA 5.7.15**. Exprese la capacidad de la canaleta con una función de x. [*Pista:* capacidad = volumen].

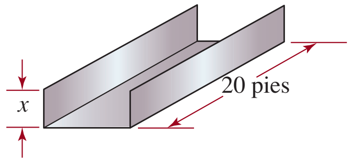

FIGURA 5.7.15 Canalón pluvial para el problema 35

36. Se va a fabricar una lata de jugo, con forma de cilindro circular recto, para contener un volumen de 32 pulg^3 (**FIGURA 5.7.16*a***). Calcule las dimensiones de la lata para que en su construcción se use la mínima cantidad de material. [*Pista:* material = superficie total de la lata = superficie de la tapa + superficie del fondo + superficie lateral. Si se quitan las tapas superior e inferior, y el cilindro se corta recto en su lado y se aplana, el resultado es el rectángulo que se ve en la figura 5.7.16*c*)].

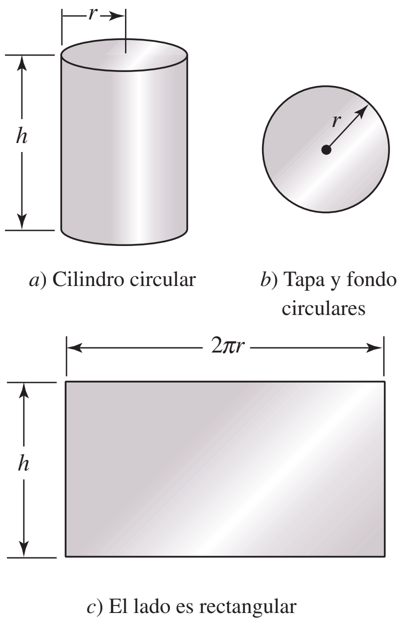

FIGURA 5.7.16 Lata de jugo para el problema 36

37. Una página impresa tendrá márgenes de 2 pulgadas, en blanco, en los lados, y márgenes de 1 pulgada, en blanco, en las partes superior e inferior (**FIGURA 5.7.17**). El área de la parte impresa es de 32 pulg^2. Calcule las dimensiones de la página, para usar la cantidad mínima de papel.

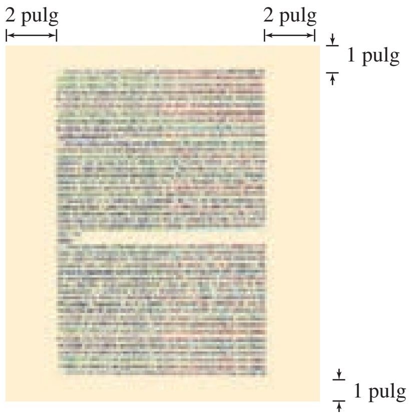

FIGURA 5.7.17 Página impresa para el problema 37

38. Muchas medicinas se encierran en cápsulas, como se ve en la foto adjunta. Suponga que se forma una cápsula pegando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto, como se ve en la **FIGURA 5.7.18**. Si el volumen total de la cápsula debe ser de 0.007 pulg^3, calcule las dimensiones de ella para que en su construcción se use la cantidad mínima de material. [*Pista:* el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, y su superficie es $4\pi r^2$].

Cápsulas

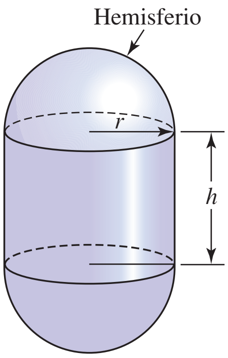

FIGURA 5.7.18 Modelo de la cápsula para el problema 38

39. Un canalón de agua de 20 pies de longitud tiene sus extremos en forma de triángulo isósceles, con lados de 4 pies de longitud (**FIGURA 5.7.19**). Determine la dimensión del lado superior del triángulo para que el volumen del canalón sea máximo. [*Pista:* un *cilindro recto* no es necesariamente un *cilindro circular*, cuando la tapa y el fondo son circulares. La tapa y el fondo de un cilindro recto son iguales, pero podrían ser triángulos, pentágonos, trapezoides, etc. El volumen de un cilindro recto es el área de la base × altura].

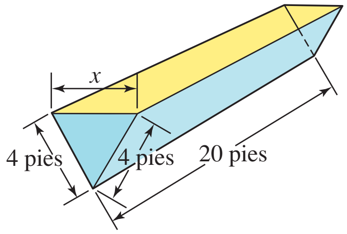

FIGURA 5.7.19 Canalón de agua para el problema 39

40. Algunas aves vuelan con más lentitud sobre agua que sobre tierra. Un pájaro vuela a 6 km/h constante sobre agua, y a 10 km/h sobre tierra. Con la información de la **FIGURA 5.7.20**, determine la trayectoria que debe seguir el ave para que su vuelo tenga un tiempo mínimo total, entre la orilla de una isla y su nido en la orilla de otra isla. [*Pista:* distancia = velocidad × tiempo].

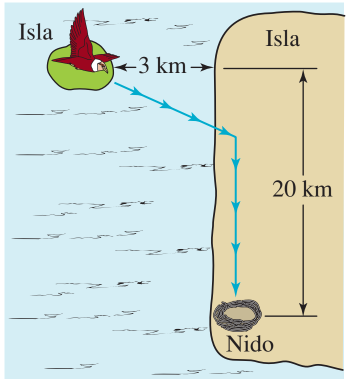

FIGURA 5.7.20 Ave del problema 40

≡ Para la discusión

41. En el problema 19 ¿qué sucede con la longitud de la sombra del árbol, cuando su altura se acerca a 25 pies?

42. En un libro de ingeniería, se dice que el área del octágono de la **FIGURA 5.7.21** es $A = 3.31r^2$. Demuestre que en realidad esta fórmula es un cálculo aproximado del área. Calcule el área A exacta del octágono, en función de r.

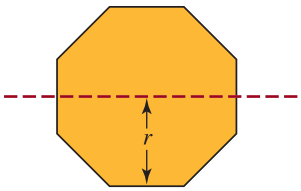

FIGURA 5.7.21 Octágono del problema 42