Guía problemas

Tutor: Javier Huenupi
Programa Tutorías TIP FI1100

1. Interferencia

P1.- Considere un experimento como el que se muestra en la Figura, donde hay una placa de vidrio (transparente) de índice de refracción n y espesor t, esta se coloca entre la ranura superior y la pantalla de tal forma que la luz pasa a través de la placa perpendicularmente a sus superficies.

1. Esta placa genera que el patrón de interferencia se traslada hacia arriba (según la disposición de la Figura), calcule este desplazamiento h en función de los parámetros del problema (incluyendo los que se muestran en la Figura)
2. Ahora considere que no conoce el espesor de la placa de vidrio, pero conoce la longitud de onda λ de la luz y observa que el punto central de la pantalla es un punto oscuro, con esto calcule el grosor **mínimo** de la pantalla de vidrio

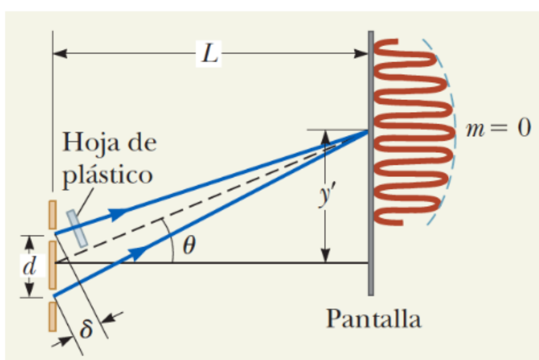

Figura 1: P1

P2.- Con frecuencia, las celdas solares (dispositivos que generan electricidad cuando se exponen a la luz solar) están recubiertas con una delgada película transparente de monóxido de silicio (SiO, $n = 1.45$) para minimizar las pérdidas por reflejo de la superficie. Suponga que una celda solar de silicio ($n = 3.5$) está recubierta en su superficie superior con una delgada película de monóxido de silicio para este propósito. Dibuje la refracción y reflexión de la luz, y determine el mínimo grosor de película que produce la menor reflexión a una longitud de onda de 550 nm, cerca del centro del espectro visible.

P3.- Generalicemos las fórmulas para interferencia constructiva y destructiva para una película delgada. Para las fórmulas que aprendieron se considera una incidencia normal (perpendicular a la superficie), ahora considere que el rayo incidente forma un ángulo θ_1 con respecto a la vertical (como se ve en la Figura). El índice de refracción de la película de grosor d es n_2 y esta película esta rodeada por aire con índice de refracción $n_1 = 1$.

1. Demuestre que para un rayo de luz de longitud de onda λ, la condición para tener interferencia destructiva es:

$$2d\sqrt{{n_2}^2 - \sin^2\theta_1} = m\lambda,$$

   y para una interferencia constructiva:

$$2d\sqrt{{n_2}^2 - \sin^2\theta_1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

   con $m,\ n$ un número natural cualquiera.

2. Considere un ángulo de incidencia $\theta_1 = \pi/6$, un índice de refracción $n_2 = 1.38$ para la película y luz producida por sodio, que tiene longitud de onda 590 nm. Calcule el grosor mínimo de la película para obtener interferencia constructiva.

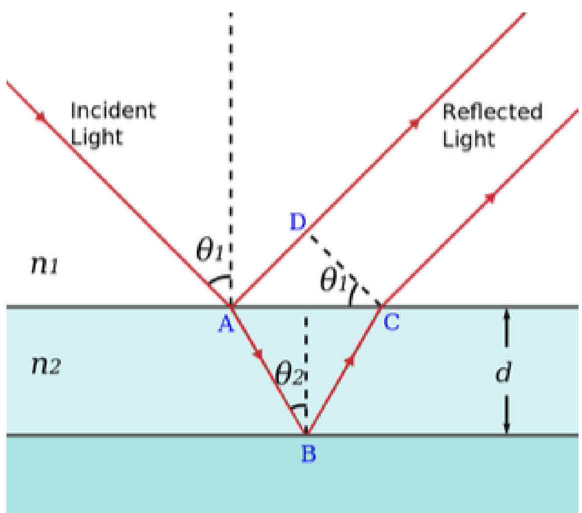

Figura 2: P3

2. Introducción a la física cuántica

2.1. Principio de incertidumbre

A diferencia de la física clásica, para dimensiones pequeñas no se puede conocer la posición y velocidad exacta de una partícula en un mismo tiempo, esto se describe en la desigualdad

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

donde $x\Delta$ y $p_x\Delta$ son las incertidumbres de la posición y el momentum respectivamente y $\hbar = h/2\pi$. También se tiene una relación similar para la energía,

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

donde ΔE es la incertidumbre de la energía y Δt el intervalo de tiempo en el que el sistema permanece en determinado estado.

P1.- Un electrón está confinado en una región de 1×10^{10} m de ancho.

1. Estime la incertidumbre mínima en la componente x de la cantidad de movimiento del electrón.
2. Si el electrón tiene cantidad de movimiento con una magnitud igual a la incertidumbre determinada en el inciso 1., ¿cuál es su energía cinética? Exprese el resultado en joules y en electrón volts.

P2.- Un átomo de sodio está en uno de los estados llamados "niveles excitados inferiores". Permanece en ese estado durante un tiempo promedio de 1.6×10^{-8} s y hace una transición regresando al estado fundamental, con emisión de un fotón de 589 nm de longitud de onda, y 2.105 eV de energía. ¿Cuál es la incertidumbre en la energía de ese estado excitado? ¿Cuál es la dispersión de longitud de onda de la línea espectral correspondiente?

P3.- Un fastidioso mosquito de 1.5 mg está zumbando cerca de usted mientras estudia física en su habitación, la cual mide 5 m de ancho y 2.5 m de alto. Decide aniquilar de un golpe al insecto cuando éste se aproxima a usted pero sabe que necesita estimar la rapidez del insecto para darle un golpe certero.

1. ¿Cuál es la incertidumbre máxima en la posición horizontal del mosquito?
2. ¿Qué límite impone en el principio de incertidumbre de Heisenberg a su capacidad de conocer la velocidad horizontal de este mosquito? ¿Dicha limitación es un impedimento serio en su intento por aniquilarlo?

P4.- Una canica de 10 g se coloca suavemente sobre una mesa horizontal que tiene 1.75 m de ancho.

1. ¿Cuál es la incertidumbre máxima en la posición horizontal de la canica?
2. Según el principio de incertidumbre de Heizenberg, ¿qué incertidumbre mínima tiene la velocidad horizontal de la canica?
3. A la luz de su respuesta al inciso 2., ¿cuál es el tiempo máximo que la canica podría permanecer el la mesa? Compare este tiempo con la edad del Universo, que es aproximadamente de 14 mil millones de años. (Sugerencia: ¿puede usted saber que la velocidad horizontal de la canica es exactamente cero?)

2.2. Mecánica cuántica

La función de onda describe la distribución de una partícula en el espacio y se calcula a partir de la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+U(x)\psi(x)=E\psi(x), \tag{1}$$

donde m es la masa de la partícula, Ψ la función de onda, U la energía potencial y E la energía (constante) del sistema.

Para una partícula libre se tiene que esta función es de la forma:

$$\Psi(x,t)=\underbrace{Ae^{ikx}}_{\text{espacial}}\underbrace{e^{-i\omega t}}_{\text{temporal}}=A\cos(kx-\omega t)+iA\sin(kx-\omega t), \tag{2}$$

con $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$ el número de onda.

También la función de onda nos indica la probabilidad de encontrar una partícula en un intervalo dx,

$$|\psi(x)|^2dx, \tag{3}$$

donde debemos normalizarla usando las constantes para obtener:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=1. \tag{4}$$

$\boxed{\textbf{P1.-}}$ Demuestre que la función de onda independiente del tiempo $\psi(x)=A_1e^{ikx}+A_2e^{-ikx}$ es la función de onda para una partícula libre, además calcule la energía.

$\boxed{\textbf{P2.-}}$ (**Mardones**) Una partícula cuántica de masa m se mueve en un pozo de potencial infinito de longitud $2L$. Dentro de la región $-L<x<L$, tiene un potencial conocido dado por la expresión:

$$U(x)=-\frac{\hbar^2x^2}{mL^2(L^2-x^2)}$$

Además, dentro de la región la partícula está en un estado estacionario descrito por la función de onda $\psi(x)=A(1-x^2/L^2)$.

1. Determine la energía total de la partícula en términos de $\hbar$, m y L.
2. Demuestre que $A=\sqrt{\dfrac{15}{16L}}$
3. Determine la probabilidad de encontrar la partícula entre $x=-L/3$ y $x=L/3$

$\boxed{\textbf{P3.-}}$ (**Mardones**) En un modelo sencillo de un núcleo radiactivo, una partícula alfa ($m=6.64\times10^{-27}$ kg) queda atrapada por una barrera cuadrada de 2 fm de ancho, y 30 MeV de altura.

1. ¿Cuál es la probabilidad de tunelamiento cuando la partícula alfa encuentre la barrera, si su energía cinética es 1 MeV menor que el borde de la barrera?
2. ¿Cuál es la probabilidad de tunelamiento, si la energía de la partícula alfa es 10 MeV menor que la parte superior de la barrera?

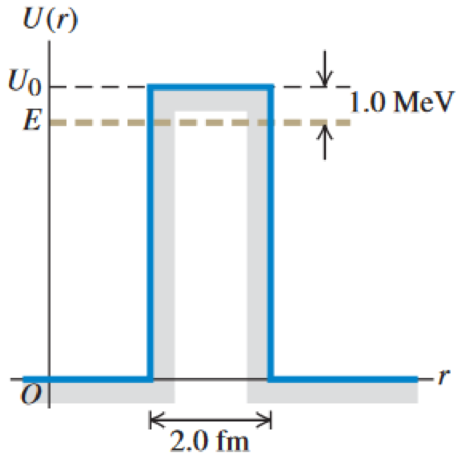

Figura 3: Barrera de potencial.

P4.- Considere un pozo de potencial definido como $U(x) = \infty$ para $x < 0$, $U(x) = 0$ para $0 < x < L$, y $U(x) = U_0 > 0$ para $x > L$, ver figura. Considere una partícula con masa m y energía cinética $E < U_0$ que está atrapada en el pozo.

1. La condición de frontera en la pared infinita ($x = 0$) es $\psi(0) = 0$. ¿Cuál debe ser la forma de la función $\psi(x)$ para $0 < x < L$, para que satisfaga tanto la ecuación de Schrödinger como esta condición en la frontera?

2. La función de onda debe permanecer finita cuando $x \to \infty$. ¿Cuál debe ser la forma de la función $\psi(x)$ para $x > L$, para que se satisfagan la ecuación de Schrödinger y la condición en la frontera para el infinito?

3. Imponga las condiciones en la frontera para que ψ y $d\psi/dx$ sean continuas en $x = L$. Demuestre que las energías de los niveles permitidos se obtienen a partir de la solución de la ecuación $k \cot kL = -\kappa$, donde $k = \sqrt{2mE/\hbar}$ y $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)/\hbar}$

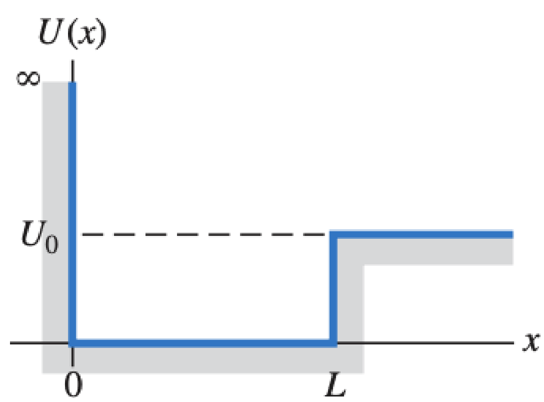

Figura 4: Potencial exótico.

$\boxed{\textbf{P5.-}}$ Un átomo de sodio de masa 3.82×10^{-26} kg vibra en un cristal con movimiento armónico simple. La energía potencial aumenta 0.0075 eV cuando el átomo se desplaza 0.014 nm de su posición de equilibrio.

1. Determine la frecuencia angular, según la mecánica newtoniana.
2. Calcule las distancias entre los niveles de energía adyacentes, en electron volts.
3. Si un átomo emite un fotón durante una transición de un nivel de vibración al siguiente nivel menor, ¿cuál es la longitud de onda de ese fotón? ¿En cuál región del espectro electromagnético está?