# **ECUACION DE ONDA**

## DEFINICIÓN

Definimos una ecuación de onda como el modelo matemático capaz de describir un proceso de propagación de energía ondulatoria considerando sus condiciones iniciales y de contorno (frontera). Partiremos con el caso unidimensional

x

0

L

Sujeta a (variadas) condiciones de contorno

## Condiciones de Contorno de Drichelet

Estas corresponden a condiciones de contorno donde los valores de la presión sonora están prescritos

* En este primer caso se puede interpretar como ondas sonoras en un tubo que tiene ambos extremos abiertos. O también estas condiciones de contorno corresponden a una cuerda con ambos extremos fijos
* Cuando tenemos una fuente de presión sonora en un extremo con valores conocidos y el otro extremo abierto. Este caso corresponde a régimen permanente y ha sido resuelta con todo detalle en Física Acústica

## Condiciones de Contorno de Neumann

Estas corresponden a condiciones de contorno donde los valores de la primera derivada parcial con respecto a la variable de la presión sonora están prescritos.

* En este primer ejemplo tenemos un tubo cerrado en ambos extremos con tapas infinitamente rígidas
* Podemos además tener condiciones de contorno mixtas, como el caso de un tubo con una fuente y cerrado en otro extremo en régimen permanente como fue profundamente analizado en Física Acústica

## Condiciones de Contorno de Robin

* Impedancia acústica específica en ambos extremos del tubo (material absorbente)

## Condiciones Iniciales

Si nuestra situación está asociada a régimen transiente debemos considerar las condiciones iniciales, las que están asociadas a una distribución inicial de presión sonora y una taza de la presión sonora con respecto al tiempo

## ECUACIÓN DE ONDA TUBO ABIERTO EN AMBOS EXTREMOS / ECUACIÓN DE ONDA DE CUERDA FIJA EN AMBOS EXTREMOS

Analizaremos la ecuación de onda en régimen transiente, es decir la ecuación de onda, sus condiciones de contorno y condiciones iniciales son las siguientes

* Condiciones de contorno
* Condiciones Iniciales

Usaremos el método de separación de variables, el cual asume que la solución es de la forma

Ingresemos esta solución a la ecuación de onda

Dividimos ambos lados por

La primera parte ecuación solo depende de y la segunda solamente del tiempo

Este segundo lado es una constante para la variable

Este primer lado es una constante para la variable

Entonces

La constante es la misma para ambos lados de la ecuación y se designa de manera conveniente . Como resultado podemos separar y desacoplar las ecuaciones y sus condiciones de contorno

## Primera Ecuación

Analicemos la ecuación

Tenemos la ecuación del oscilador armónico cuya solución es

Usamos las condiciones de contorno

Reescribimos la solución

Aplicamos la segunda condición de contorno

Y esta condición es válida para un conjunto discreto e infinito de valores de

Los valores de son

Por lo tanto, tengo un conjunto infinito y discreto de soluciones que satisfacen ambas condiciones de contorno. Además, sin pérdida de generalidad podemos hacer .

Y por lo tanto poseo infinitas soluciones para la ecuación y sus condiciones de contorno, además, hacer la constante sin perder generalidad. Podemos considerar e interpretar que tenemos en la llamada Primera Ecuación como un conjunto de infinitas ecuaciones con infinitas soluciones

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n | Ecuación | Solución | kn |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| … |  |  |  |
| n |  |  |  |
| … |  |  |  |

## Segunda Ecuación

Y a esta se le asocian las condiciones iniciales, las cuales serán incorporadas al final de este proceso

Podemos reescribir esta ecuación

Ordenamos

Definimos

Donde

Donde los son las frecuencias naturales angulares y por supuesto tenemos las frecuencias naturales o de resonancia , también los podemos llamar armónicos

|  |  |
| --- | --- |
| n | frecuencia |
| 1 – Primer armónico o fundamental |  |
| 2 – Segundo armónico  |  |
| 3 – Tercer armónico |  |
| etc… | etc… |

Entonces tengo ecuaciones

Cuyas soluciones son

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n | Ecuación | Solución |  |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| … |  |  |  |
| n |  |  |  |
| … |  |  |  |

Volvamos a la ecuación de onda

Y su solución por el método de separación de variables

El que nos entrega un conjunto discreto e infinito de soluciones de la forma

La solución completa corresponde a la combinación lineal de todas las soluciones de forma simultánea

La solución

La derivada temporal de la solución

Entonces para calcular las constantes y debemos incorporar las condiciones iniciales

## Primera Condición Incial

Es decir que

Entonces estamos frente a una Serie de Fourier. Los coeficientes son dados por

## Segunda Condición Inicial

Tenemos otra Serie de Fourier

Usando el cambio de variable

Entonces

Esto nos permite

## ECUACIÓN DE ONDA DE CUERDA FIJA EN AMBOS EXTREMOS

La solución

Como es nulo entonces

Usaremos los recursos

Primera parte

Segunda parte

Sumamos los resultados

Finalmente

Para escribir la solución recordemos que

Como

## ECUACIÓN DE ONDA TUBO CERRADO EN UN EXTREMO ABIERTO EN EL OTRO CON AMORTIGUAMIENTO

Analizaremos la ecuación de onda en régimen transiente, es decir la ecuación de onda, sus condiciones de contorno y condiciones iniciales son las siguientes

* Condiciones de contorno
* Condiciones Iniciales

Variables separables

Dividimos ambos lados por

Tenemos dos ecuaciones desacopladas

Las derivadas parciales pueden considerarse derivadas totales

## Primera Ecuación

La primera ecuación se puede asociar a las condiciones de contorno

Ordenemos la ecuación

La solución es de la forma

Su primera derivada

Evaluamos la primera condición de contorno

Entonces y rescribimos la solución como

La segunda condición establece

La única forma en que esta expresión sea nula es para el conjunto infinito y discreto de valores

Por lo tanto a fin de que la solución cumpla a cabalidad las condiciones de contorno, tendremos un conjunto infinito de soluciones de la forma. Además, sin pérdida de generalidad podemos hacer que la constante

## Segunda Ecuación

Tenemos esta ecuación la cual será asociada a las condiciones iniciales

Pero al observar que los valores de son infinitos. En el fondo se procederá a resolver un conjunto infinito y discreto de ecuaciones diferenciales

Multiplicamos por

Multiplicamos por

Llamamos

Donde , son las infinitas frecuencias naturales angulares

Las frecuencias naturales o frecuencias de resonancia o armónicos son

El polinomio asociado es

Asumiremos que el caso de sub amortiguamiento

Factorizamos por en la raíz cuadrada

Llamamos al término como frecuencia natural amortiguada

Donde el término es llamado razón de amortiguamiento modal

Finalmente

Y tenemos el conjunto de soluciones

La presión sonora posee múltiples soluciones de la forma

La solución completa estará dada por la combinación lineal de las soluciones

Entonces la solución es

La primera derivada parcial temporal de la solución es

Aplicaremos las condiciones iniciales

La primera es

Entonces

Aplicamos la segunda condición de contorno

Entonces

Podemos llamar

Entonces usando la serie de Fourier calculamos los coeficientes

Lo que quiere decir

Entonces la solución al aplicar las condiciones de contorno e iniciales