# **SERIES DE FOURIER**

## **FUNCIONES ORTOGONALES**

## Producto Interno

Consideremos dos vectores

El producto interno de vectores se define como

Para vectores de dimensión mayor, es decir los vectores son del tipo

Podemos generalizar el concepto de producto interno a otros espacios vectoriales donde este se puede definir a partir de los vectores y del escalar

1. es conmutativo
2. es un escalar
3. si si

## Producto Interno de Funciones

Si estamos en el espacio vectorial de las funciones definidas en , es decir un intervalo cerrado, donde existen las funciones y , el producto interno se define como

Tarea1: Demostrar que esta expresión cumple con las reglas de producto interno

Dos funciones son ortogonales, si cumplen con

Un ejemplo de esto es y en el intervalo

Podemos extender esta situación a un conjunto de funciones en un intervalo , donde este conjunto de funciones es ortogonal si

Definimos la norma de una función

Un conjunto es ortonormal

Cualquier conjunto ortogonal de funciones se puede orto normalizar si cada uno de sus elementos se divide por su norma

Como ejemplo podemos tomar el conjunto de funciones definidas en el intervalo dado por comprobaremos que son ortogonales y luego normalizaremos

Usamos la identidad trigonométrica

Calcularemos la norma de la función

Nos interesa inicialmente calcular

Por lo tanto

Y el conjunto ortonormal es

## Expansión de una Función en una Serie Ortonormal de Funciones

Si esta definida en el intervalo y dentro del mismo existe un conjunto ortogonal de funciones

Un ejemplo de expansión en serie de una función es la serie de Taylor

Las funciones son linealmente independientes, pero no son ortogonales

Si un conjunto de funciones es ortogonal (ortonormal) siempre son linealmente in dependientes. Es mucho más fácil determinar los coeficientes

Debemos entonces determinar un método para calcular los coeficientes . Para ello determinaremos el producto interno de

Intercambiamos la sumatoria y la integral

Esto nos da que

O bien cada coeficiente puede ser calculado como

Cuando el conjunto es ortonormal y todo se simplifica. En términos generales una función puede expresarse como

## **SERIE DE FOURIER**

Lo primero es considerar a priori que el conjunto de funciones en el intervalo

Es un conjunto ortogonal

Tarea2: Demostrar que este conjunto de funciones es ortogonal

Una función periódica de período definida en el intervalo que cumple con

Puede ser expresada como

Coeficiente

Donde el coeficiente puede ser calculado como

Podemos intercambiar las integrales por la sumatoria

Debido a la ortogonalidad de las funciones y a que al integrar una función trigonométrica en un intervalo simétrico al origen es siempre nulo

Por lo tanto, el coeficiente está dado por la expresión

Coeficiente

Igual que en el caso anterior partimos del producto interno

La primera integral es nula porque una función trigonométrica integrada en un intervalo simétrico en torno al origen es nula

Eso se debe a que la función seno es impar y la función coseno es par. Su multiplicación es par y por lo tanto al integrarse en un intervalo simétrico al origen el resultado es cero. Por otro lado la integral

Por lo tanto

Coeficiente

Usando el procedimiento anterior se puede demostrar que

Tarea3: Demostrar que esta es la expresión necesaria para calcular

Resumen

Ejemplo

Calcular los coeficientes de la Serie de Fourier para la función en el intervalo

Finalmente tenemos





Ejemplo



Determinamos el valor

Primera parte

Segunda parte

Tercera parte

O bien





## **SERIE DE FOURIER COMPLEJA**

Usemos las expresiones

Donde , por lo tanto, podemos reorganizar la Serie de Fourier usando las expresiones

Aplicaremos estas identidades a la expresión asociada a la Serie de Fourier

Factorizamos

Redefinimos los términos

Reorganizaremos la información asociada al cálculo de estos coeficientes, partamos por

Continuemos con

Trabajaremos ahora con

Volvamos a la Serie de Fourier Compleja y la podemos reescribir como

Reemplazamos los coeficientes por las respectivas integrales

Si tomamos en cuenta que

Y por otra parte el primer término

Entonces la Serie de Fourier Compleja es

Donde todos los coeficientes se calculan como

La interpretación física de los coeficientes es que el módulo es la amplitud de oscilación para cada frecuencia

Y el otro término es la fase

Antes habíamos hablado de que la función era periódica de período entonces la frecuencia fundamental o primer armónico es dado por

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Frecuencia | Frecuencia *Angular* |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Al presentar el concepto de frecuencia en el contexto de la Serie de Fourier Compleja

Podemos ver como un conjunto de elementos que no solamente forman parte de los cursos de álgebra y cálculo forman parte de este proceso. Primero la razón entre el primer armónico/frecuencia fundamental y el segundo armónico determina el intervalo de octava

Obtenemos la relación entre el segundo y tercer armónico expresado como la quinta justa

Obtenemos la relación entre el tercer y cuarto armónico expresado como la cuarta justa

A partir de estas relaciones podemos llegar a todos los intervalos de las escalas musicales

Ejemplo

Podemos observar que *,* los coeficientes son

La función coseno es una función par







Ejemplo

El valor de p es

Para considerar el caso podemos multiplicar y dividir esta expresión por

Podemos usar el límite notable

Entonces





