1. **TRANSFORMADA DE LAPLACE**
	1. DEFINICIÓN

Se define la transformada de Laplace para una función como la integral

Para que esta integral impropia se requiere que se cumplan para valores de , y tales que

Es decir que la función debe ser de Orden Exponencial

Ejemplo

Ejemplo

Resolvemos por partes donde y

Mediante el método de inducción se puede demostrar que

Lo cual queda de tarea

Ejemplo

Queda de tarea demostrar que

Por otra parte, podemos hacer otro ejemplo

No definiremos la transformada inversa, esto es porque en realidad la variable ., esto requiere que se dicte de forma previa un curso de cálculo en el dominio de los números complejos. Podemos eso sí intuir que la Transformada de Fourier es un caso especial de la transformada de Laplace

Se puede considerar la variable y por lo tanto cuando la Transformada de Laplace coincide con la Transformada de Fourier. Sin embargo, por ser un tema que está más allá de los contenidos de este curso, no entraremos en un método analítico para calcular la trasformada inversa y presentaremos un método de carácter práctico.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UNA DERIVADA

Calcularemos la transformada de Laplace de una función derivada

Usaremos la integración por partes donde y

Calcularemos ahora la Transformada de Laplace de la segunda derivada de una función

Usamos entonces integración por partes donde y

Entonces podemos demostrar mediante inducción que la transformada de la enésima derivada de una función es

Ejemplo

Usamos la transformada de Laplace

Despejamos y factorizamos

Para determinar la transformada inversa debemos simplificar estas expresiones mediante el uso de fracciones parciales

Sistema de ecuaciones

Entonces

Usamos las tablas para transformada inversa

La solución complementaria de la ecuación homogénea es

Y la solución particular es asociada a

* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UNA FUNCIÓN MULTIPLICADA POR

Determinaremos la transformada de una función multiplicada por mediante un simple cambio de variable llamamos

Usamos las propiedades

Factorizamos y ordenamos

Para el primer término usamos la propiedad que fue mencionada al inicio de este apartado

Usamos fracciones parciales para el otro término

* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCION MULTIPLICADA POR

La función escalón unitario o función de Heaviside

## Caso 1

## Caso 2

Ejemplo caso 1

Ejemplo caso 2

Resolvamos

Separamos las fracciones parciales

Usamos la inversa de las transformadas y las respectivas propiedades

Otro ejemplo

Concentrémonos en la fracción parcial

Usando las propiedades de la Transformada de Laplace

* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCION MULTIPLICADA POR

Consideremos la derivada de la Transformada de Laplace derivada con respecto a la variable

Como la integral y la derivada son operadores lineales se pueden intercambiar

Podemos concluir que

Si calculamos la segunda derivada

Por lo tanto

Podemos extrapolar que

Realicemos el ejemplo

Inicialmente se ve que la fracción parcial no es alcanzable de forma fácil, pero pensemos en la derivada de

Comparamos con lo anterior, vemos que se parece pero que hay que ajustar algunos factores

Por lo tanto

Cuando consideramos esto como un sistema oscilatorio masa resorte sin amortiguamiento

La frecuencia de resonancia es igual a la frecuencia de la fuerza impulsora y es esperable una solución que crece hasta el infinito



* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UNA INTEGRAL

Si tenemos una función que es integrada de la forma

Su Transformada de Laplace es

Por otro lado, si se define la convolución de funciones (operador \*)

Se puede interpretar como la respuesta en el dominio del tiempo de un sistema donde es la entrada, es la salida y es la llamada función de respuesta de impulso, la cual caracteriza al sistema físico. Cuando se realiza la Transforma da de Laplace de una convolución

Donde se cono ce como Función de Transferencia. Si el sistema es estable y recordando que la variable de Laplace es un número complejo , cuando la función de transferencia se evalúa en el eje imaginario tenemos la Función Respuesta de Frecuencia

Y entonces tenemos una relación entre la Transformada de Laplace, la Transformada de Fourier y la respectiva Serie de Fourier que hemos visto hasta el momento

Esto nos permite resolver un cierto tipo de ecuaciones llamadas Ecuaciones de Volterra. Un caso típico es el circuito RLC formado por una resistencia eléctrica, una bobina y un condensador



El voltaje generado por la fuente es y en el circuito se desplaza la corriente eléctrica

Resolvamos esta ecuación cuando se , y ,. Por otra parte, la condición inicial es que el circuito está apagado y la fuente tiene un voltaje pre predeterminado por la expresión

Fracción parcial 1

Las fracciones

Y

Aplicamos

Recordemos la propiedad de

Aplicamos

* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA

Si es una función periódica de período , es decir

La transformada de Laplace de esa función está dada por

Ejemplo



Aplicaremos este resultado para resolver la ecuación diferencial

Aplicamos la Transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial

Separemos la fracción parcial

Por otra parte, tenemos esta famosa sumatoria

Cambiando

Volviendo a

Reemplazando

Separemos un poco

Para propósitos prácticos

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Podemos decir finalmente que

También podemos expresar esto de forma compacta



Pero volvamos a considerar este problema desde la transformada de Fourier Compleja

Donde cada coeficiente se calcula como

En nuestro caso esta fusión períodica



Esta es la extensión periódica hacia el lado negativo

Es distinto de cero para números pares

Por lo tanto, podemos reconsiderar nuestra ecuación de forma genérica

Y podemos resolverla para un término genérico

Resolver como tarea

* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

Consideremos una función

La definición de la Delta de Dirac es

O bien

Representa fenómenos físicos asociados a la transferencia instantánea de momentum, es decir colisiones inelásticas



Su transformada de Laplace es

Esto nos permite resolver todo tipo de ecuaciones diferenciales de la forma

Usamos la transformada

Usando las propiedades es

* 1. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La ventaja de usar la Transformada de Laplace en este contexto es que permite resolver un problema de carácter complejo usando elementos del álgebra

Usamos Transformada de Laplace

Entonces

Resolvemos

Usamos la transformada inversa