

2. ANÁLISIS DE FRECUENCIA

2.1. SERIE DE FOURIER COMPLEJA

Si $f(t)$ es una función periódica $f(t) = f(t \mp kT)$ el período es $T = 2p$. Conforme a la definición matemática tenemos

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{k\pi}{p} t}$$
$$c_k = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-j \frac{k\pi}{p} t} dt$$

Dentro de una perspectiva más operativa en el ámbito del análisis de frecuencia tenemos

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j \frac{2k\pi}{T} t} dt$$
$$k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$$

Sin embargo, podemos todavía pensar en términos de los armónicos, múltiplos de la frecuencia fundamental

$$f_k = k f_1 = k \frac{1}{T}$$
$$f_1 = 1 f_1 = 1 \frac{1}{T}$$
$$f_2 = 2 f_1 = 2 \frac{1}{T}$$
$$f_3 = 3 f_1 = 3 \frac{1}{T}$$
$$\dots$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j 2\pi f_k t} dt$$

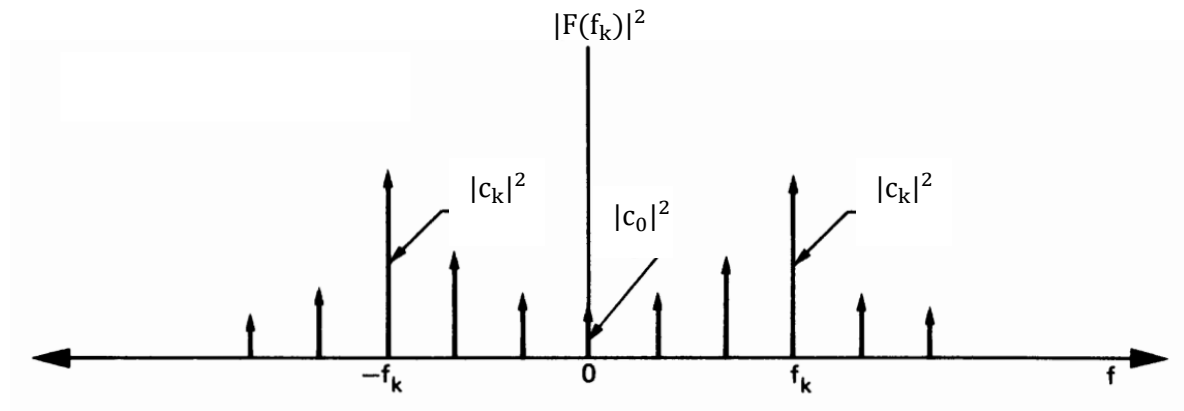
Si bien lo puedo observar los c_k como un conjunto de coeficientes, puedo reinterpretarlos como una “función” en el dominio de la frecuencia $F(f_k)$

$$F(f_k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j 2\pi f_k t} dt$$

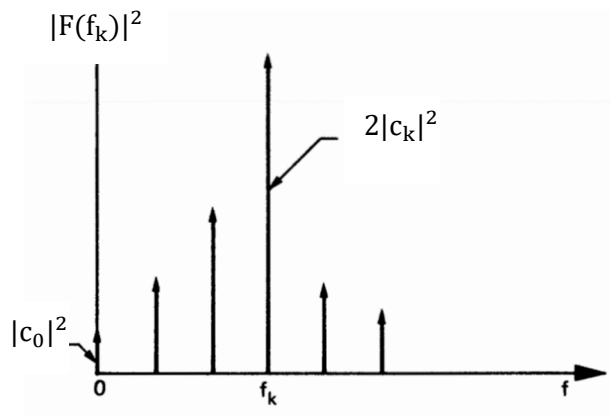
La cual puede expresarse como

$$F(f_k) = \begin{cases} c_k, & f = f_k \\ 0, & f \neq f_k \end{cases}$$

Espectro bilateral



Espectro unilateral



Teorema de Parseval

Corresponde al hecho que la energía de la señal se conserva tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. La interpretación es que la información contenida en la forma de onda se conserva cuando es transformada al dominio de la frecuencia

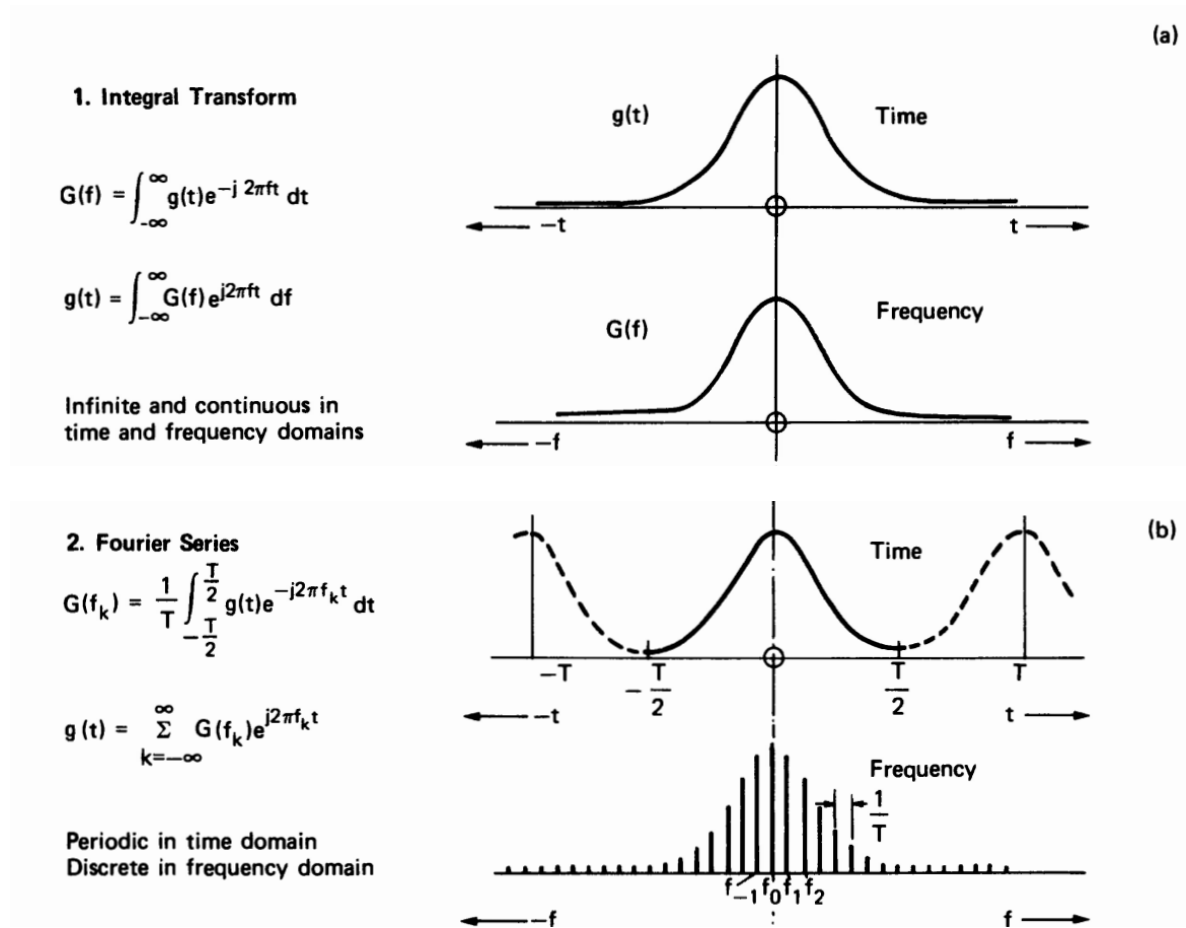
$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

2.2. TRANSFORMADA DE FOURIER

Si una señal no es periódica podemos decir que su período tiende a infinito $T \rightarrow \infty$ entonces una extensión a lo anteriormente visto es la Transformada de Fourier

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$G(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$



Por supuesto la utilidad de esta transformada es altísima en problemas de orden matemático, sin embargo en señales de audio tenemos dos grandes problemas, el primero es el proceso de muestreo y el segundo es que la señal es limitada en su duración temporal.

2.3. TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA SEÑAL MUESTREADA

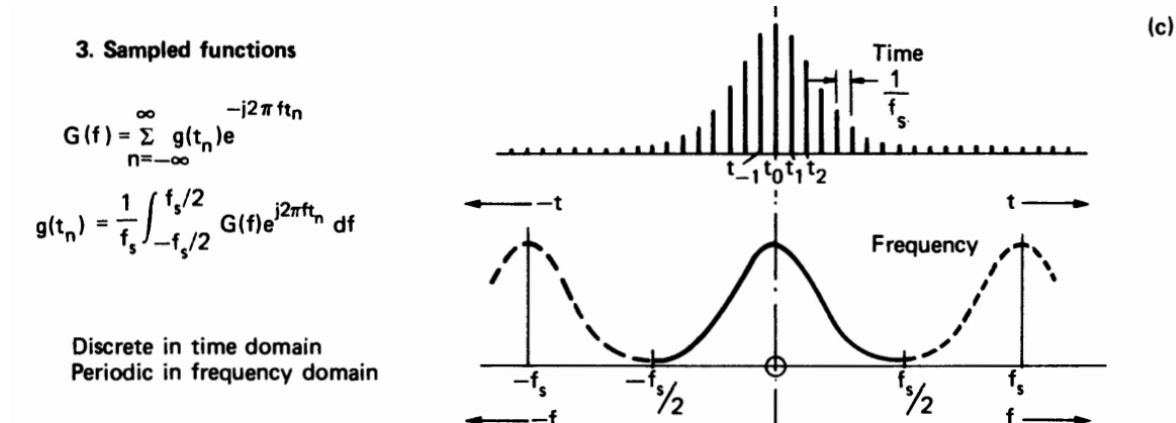
La señal de audio al ser muestreada se puede representar

$$g(t_n) = g(n\Delta t)$$

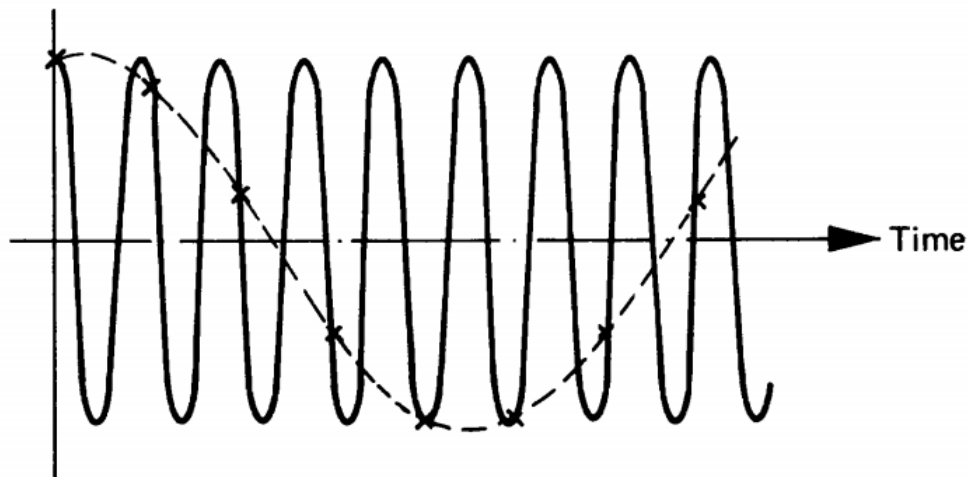
Donde Δt es el período de muestreo y $f_s = 1/\Delta t$ es la frecuencia de muestreo

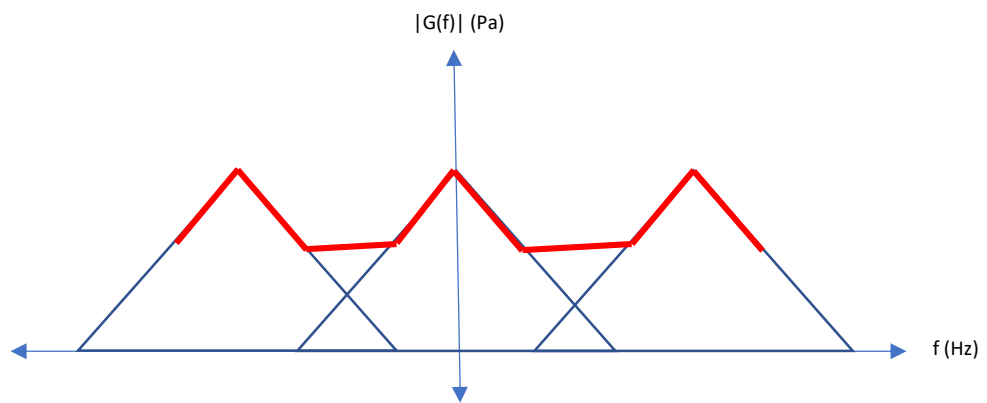
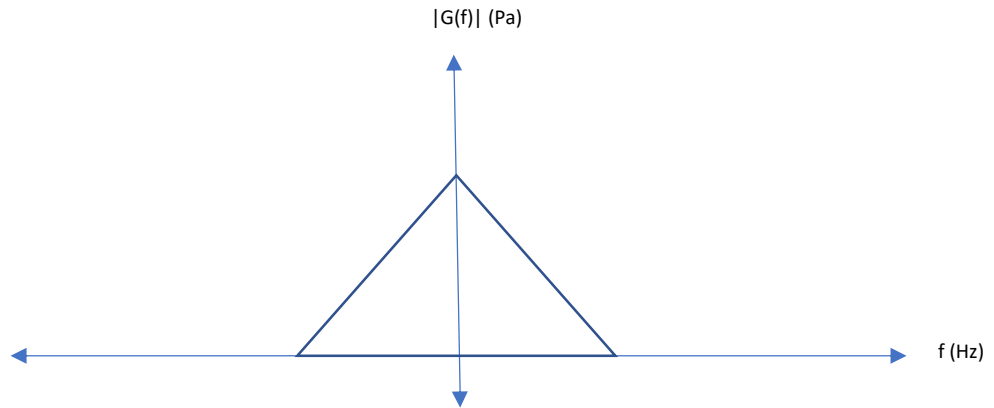
$$g(t_n) = g(n\Delta t) = \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} G(f) e^{j2\pi f t_n} df = \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} G(f) e^{j2\pi f n \Delta t} df$$

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t_n) e^{-j\frac{k\pi}{p} t_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t_n) e^{-j\frac{k\pi}{p} n \Delta t}$$



Si la frecuencia de muestreo es muy baja se produce aliasing altas frecuencias de la señal se manifiestan como bajas frecuencias en el proceso de muestreo



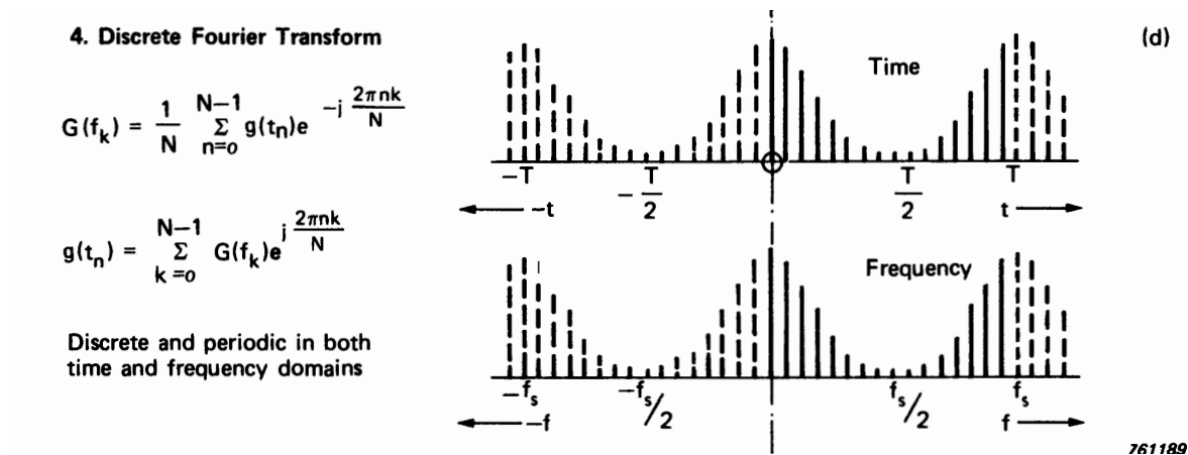


2.4. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

Al considerar un intervalo de tiempo limitado entonces tenemos la Transformada Discreta de Fourier, al realizar esto nosotros indirectamente estamos muestreando en el dominio de la frecuencia

$$g(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{N-1} G(k\Delta f) e^{j\frac{2\pi k\Delta f n\Delta t}{N}}$$

$$G(k\Delta f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n\Delta t) e^{-j\frac{2\pi k\Delta f n\Delta t}{N}}$$



En una forma más canónica la transformada discreta de Fourier se escribe como

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{j \frac{2\pi k n}{N}}$$

$$G(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}$$

Los valores de Δt y Δf no son relevantes en el proceso de cálculo, por eso se deben guardar como metadatos, junto a la señal de audio para realizar su reconstrucción en el proceso de reproducción

2.5. TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)

Corresponde un algoritmo que disminuye el número de cálculos (multiplicaciones y sumas) de la transformada discreta, consideremos $N = 5$

$$G(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{5-1} g(n) e^{-j \frac{2\pi k_0}{N}} \text{ (5 sumas y 5 multiplicaciones)}$$

$$G(1) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{5-1} g(n) e^{-j \frac{2\pi k_1}{N}} \text{ (5 sumas y 5 multiplicaciones)}$$

$$G(2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{5-1} g(n) e^{-j \frac{2\pi k_2}{N}} \text{ (5 sumas y 5 multiplicaciones)}$$

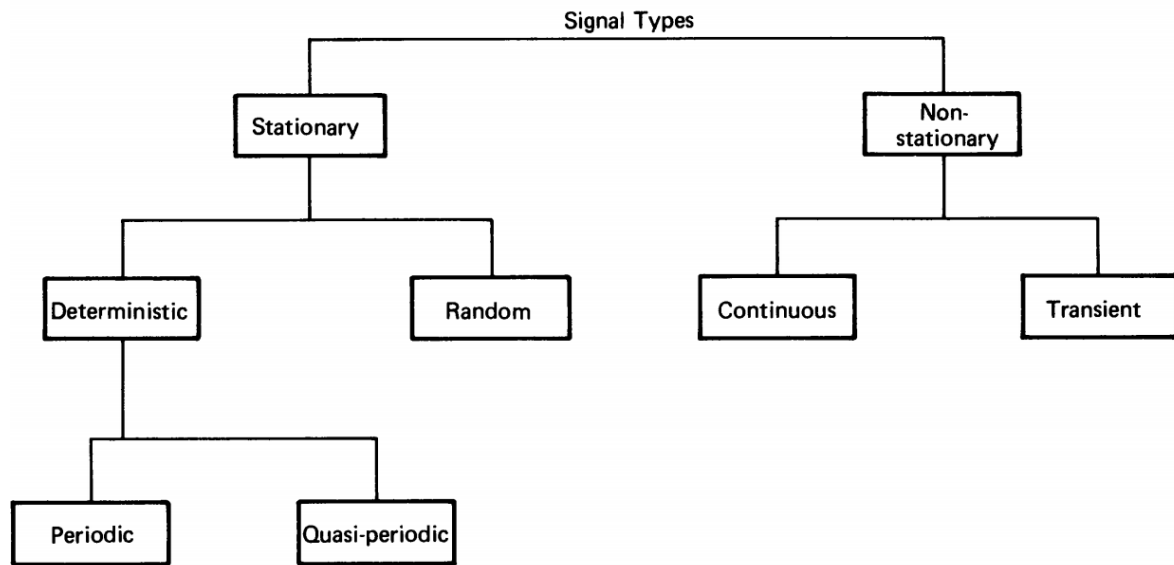
$$G(3) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{5-1} g(n) e^{-j \frac{2\pi k_3}{N}} \text{ (5 sumas y 5 multiplicaciones)}$$

$$G(4) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{5-1} g(n) e^{-j \frac{2\pi k_4}{N}} \text{ (5 sumas y 5 multiplicaciones)}$$

En total son 25 sumas y 25 multiplicaciones, es decir $2N^2$. Si tenemos un segundo de audio muestreado a 44100 (Hz), tenemos $2 \times 44100^2 = 3.88960 \times 10^9$ operaciones. La FFT disminuye

el número de operaciones a $2N\ln(N)$. Entonces en el mismo caso $2 \times 44100 \times \ln(44100) = 9.4323 \times 10^5$

2.6. TIPOS DE SEÑALES



Señal Estacionaria

Sus propiedades tales como promedios y momentos de orden superior (desviación estándar y/o variancia) no cambian en el tiempo

Señal No Estacionaria

Sus propiedades tales como promedios y momentos de orden superior (desviación estándar y/o variancia) si cambian en el tiempo. Por ejemplo, el lenguaje hablado

Señal Aleatoria

Se refiere a señales cuyos valores futuros no pueden ser predichos a partir de la observación de su comportamiento en el pasado. Sin embargo, es posible estimar promedios, valores RMS, variancias, desviación estándar, etc.

Señal Determinística

es aquella cuyo comportamiento futuro puede ser predicho usando un modelo matemático

Señal Periódica

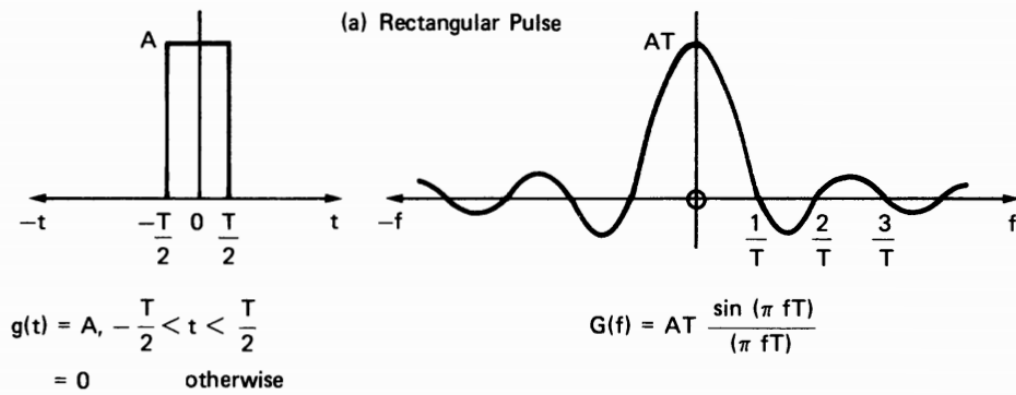
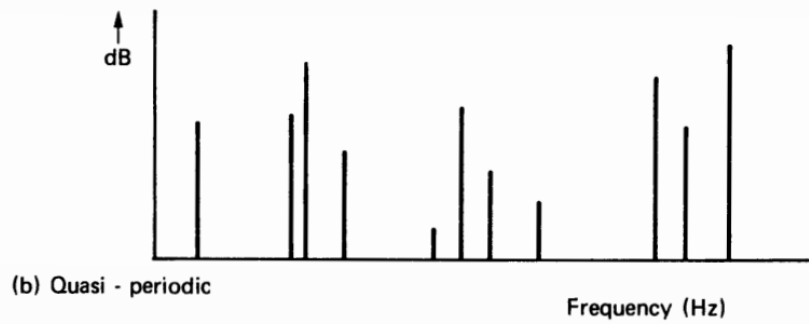
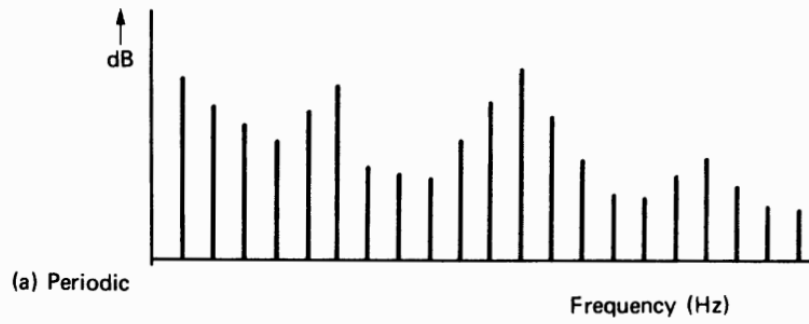
Señal cuyas frecuencias armónicas están relacionadas a partir de un número racional.

Señal Quasiperiódica

Señal cuyas frecuencias de los sobretonos están relacionadas a partir de un número irracional.

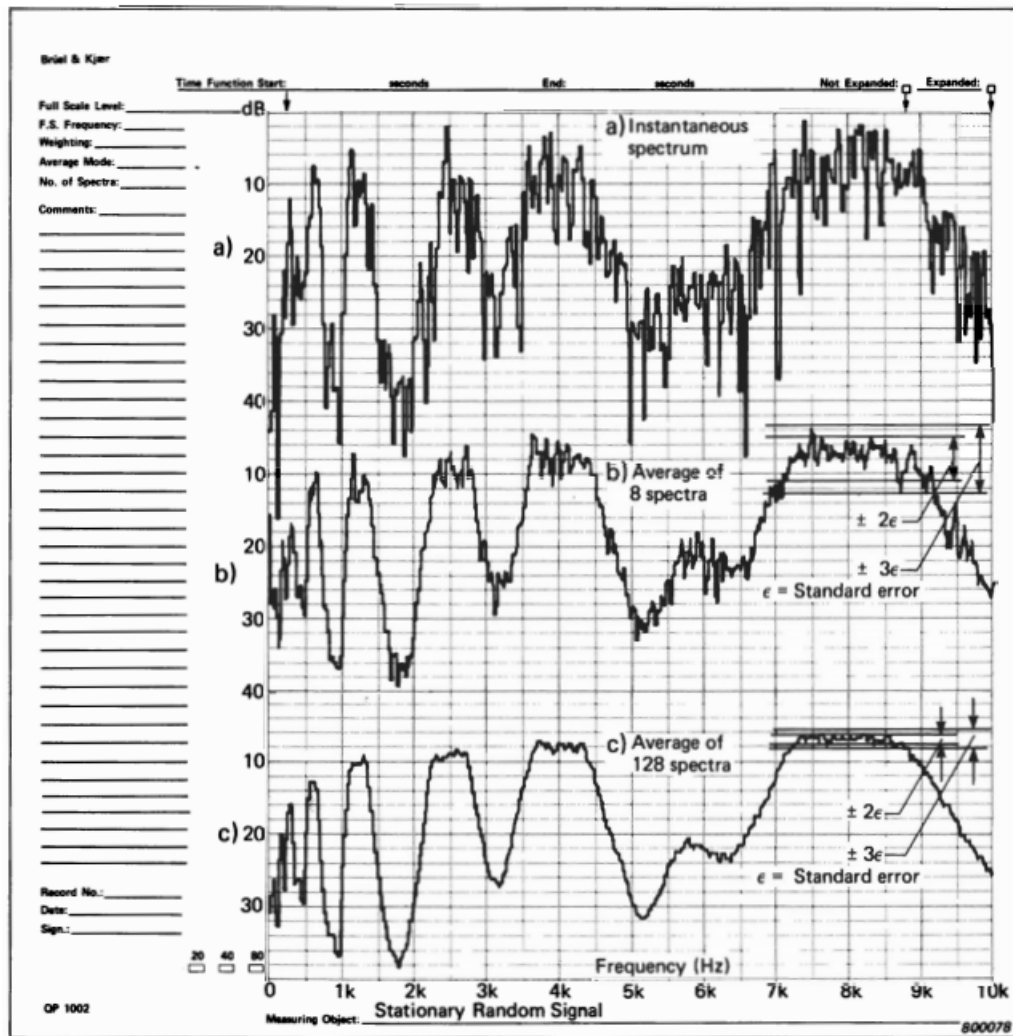
Señal Transiente: Señal que comienza y termina en cero y cuya energía es limitada en un corto período de tiempo.

(Bendat & Piersol Random Data)



2.7. ANÁLISIS DE SEÑALES ALEATORIAS

La división entre tipos de señales vista anteriormente es bastante artificial, en el sentido de que todas las señales son alteradas o contaminadas por ruidos aleatorios, esto trae la necesidad de que las mediciones deben ser “promediadas” a fin de disminuir los errores inherentes producto del ruido



Por otra parte si deseamos medir las características de un sistema acústico, tenemos la relación teórica

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Donde el signo * denota la operación integral de convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) * x(t - \tau) d\tau$$

Si usamos la transformada de Fourier continua, definida en 1.2.

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

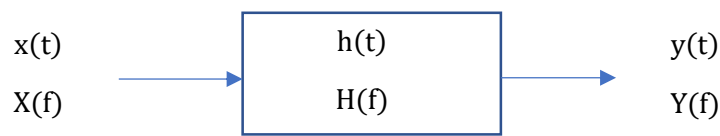
$h(t)$ Función Respuesta de Impulso (FRI)

$H(f)$ Función Respuesta de Frecuencia (FRF)

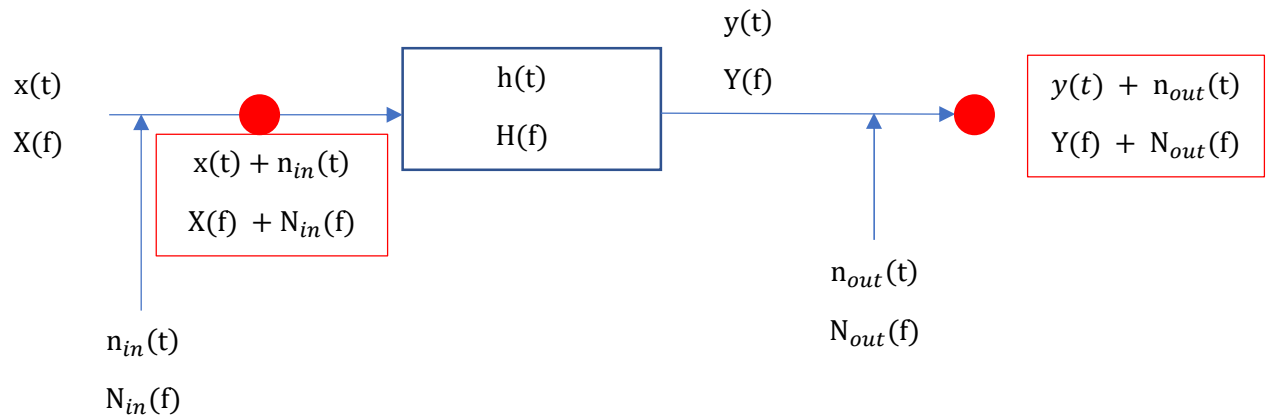
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

2.8. DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA Y ESTIMACIÓN DE LA RESPUESTA DE FRECUENCIA

Un sistema ideal se comporta como



Un sistema más realista



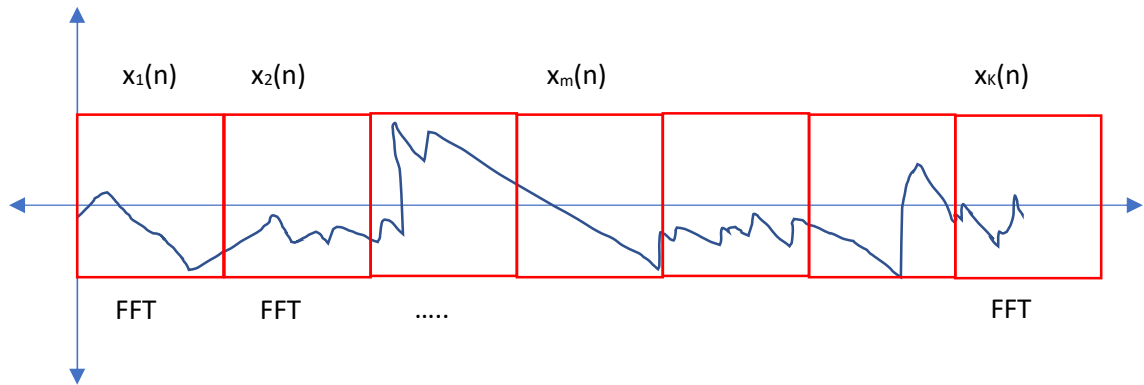
Una forma de minimizar el ruido es estimar la Densidad Espectral de Potencia (PSD) mediante el método de Periodogramas de Welch

Aplicamos FFT a cada segmento, tomamos el módulo de cada uno de esos segmentos pasados al dominio de la frecuencia y promediamos

$$S_{xx}(k) = \sum_{m=1}^K |FFT\{x_m(n)\}|^2$$

Si se desea ver de forma más clara

$$S_{xx}(k\Delta f) = \sum_{m=1}^K |FFT\{x_m(n\Delta t)\}|^2$$



Esto mismo puede ser utilizado para la señal de salida

$$S_{yy}(k) = \sum_{m=1}^K |FFT\{y_m(n)\}|^2$$

Si se desea ver de forma más clara

$$S_{yy}(k\Delta f) = \sum_{m=1}^K |FFT\{y_m(n\Delta t)\}|^2$$

Y entonces la respuesta de frecuencia del sistema puede ser estimada como

$$H_1(k) = \frac{S_{yy}(k)}{S_{xx}(k)} \quad H_1(k\Delta f) = \frac{S_{yy}(k\Delta f)}{S_{xx}(k\Delta f)}$$

El problema de este estimador es que se pierde la estimación de la fase, a fin de evitar esto se define la Densidad Espectral Cruzada

$$S_{xy}(k) = \sum_{m=1}^K FFT\{y_m(n)\} \overline{FFT\{x_m(n)\}}$$

Donde $\overline{FFT\{x_m(n)\}}$ es el conjugado complejo

Y entonces la respuesta de frecuencia del sistema puede ser estimada como

$$H_2(k) = \frac{S_{xy}(k)}{S_{xx}(k)} \quad H_2(k\Delta f) = \frac{S_{xy}(k\Delta f)}{S_{xx}(k\Delta f)}$$

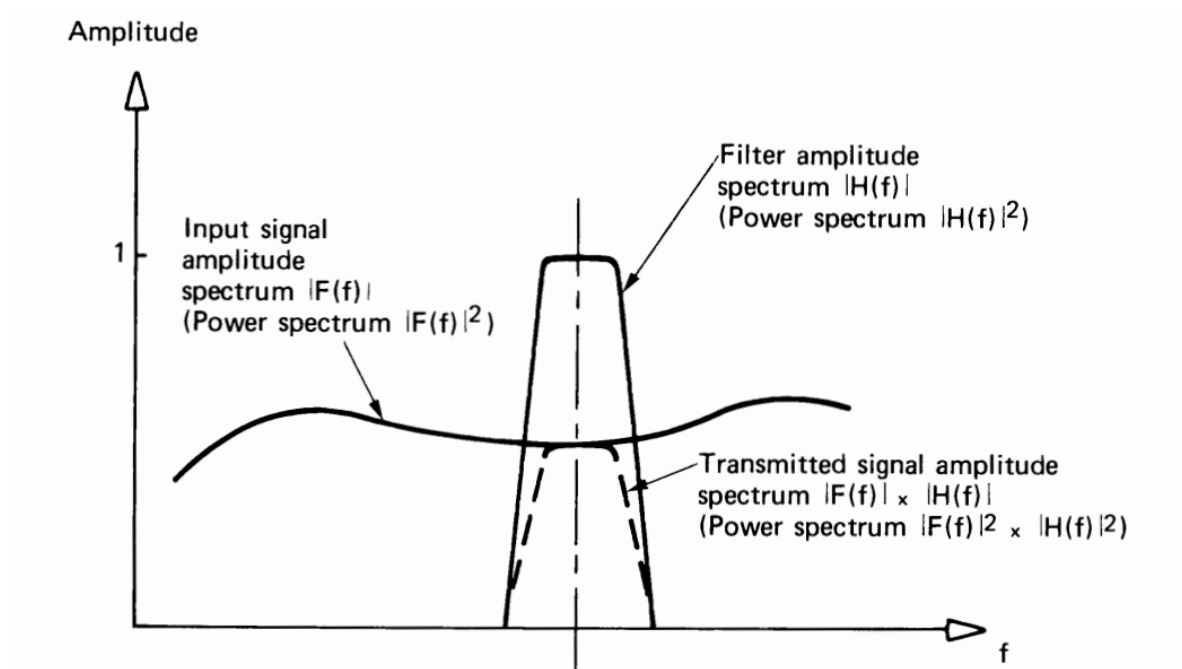
Y podemos estimar la respuesta impulsiva

$$\hat{h}(n) = \text{FFT}^{-1}\{H_2(k)\} = \text{FFT}^{-1}\left\{\frac{S_{xy}(k)}{S_{xx}(k)}\right\} \quad \hat{h}(n\Delta t) = \text{FFT}^{-1}\{H_2(k\Delta f)\} = \text{FFT}^{-1}\left\{\frac{S_{xy}(k\Delta f)}{S_{xx}(k\Delta f)}\right\}$$

Tarea leer el capítulo 7 Frequency Analysis Randall

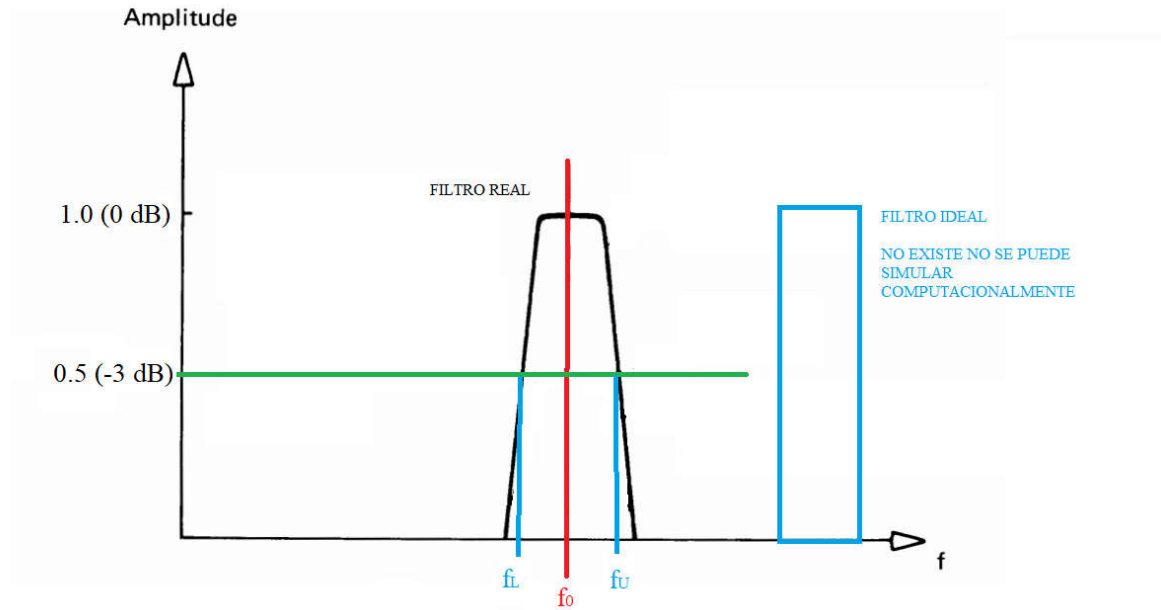
2.9. ANALISIS DE FILTROS

Filtros como dispositivos que son selectivos en términos de los contenidos de frecuencia, y en caso de acústica lo más usado son filtros de pasa banda de 1/1 octava y de 1/3 octava. Este tipo de análisis es usado principalmente en señales de carácter estacionario



Un filtro real no es perfecto posee una frecuencia central y dos frecuencias de corte, superior e inferior, la cuales se relacionan en filtros reales por

$$f_0 = \sqrt{f_L f_U}$$



En filtros de 1/1 octava se da la relación entre las frecuencias de corte

$$f_U = 2f_L$$

Y se define el concepto de ancho de banda relativo

$$\frac{f_U - f_L}{f_0} = \frac{2f_L - f_L}{f_L \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.701 \Rightarrow 70\%$$

En filtros de 1/3 octava se da la relación entre las frecuencias de corte

$$f_U = 2^{1/3} f_L$$

Y se define el concepto de ancho de banda relativo

$$\frac{f_U - f_L}{f_0} = \frac{2^{1/3} f_L - f_L}{f_L \sqrt[6]{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} = 0.231 \Rightarrow 23\%$$

Las frecuencias centrales de los filtros de 1/1 octava y de 1/3 de octava están dadas en tablas subidas a u-cursos

Cuando se tienen niveles de presión sonora medidos por banda y se desea calcular el nivel de presión total se puede usar superposición incoherente

$$L_p = 10 \log_{10} (10^{L_{p1}/10} + 10^{L_{p2}/10} + 10^{L_{p3}/10} + \dots + 10^{L_{pN}/10})$$

L_{pi} Niveles de presión sonora en la i-ésima banda de frecuencia

2.10. DETECCIÓN RMS Y NIVELES

La detección del valor RMS corresponde al promedio del valor cuadrático de la señal en un periodo de tiempo específico

$T_{ts} = 1(s)$ Slow

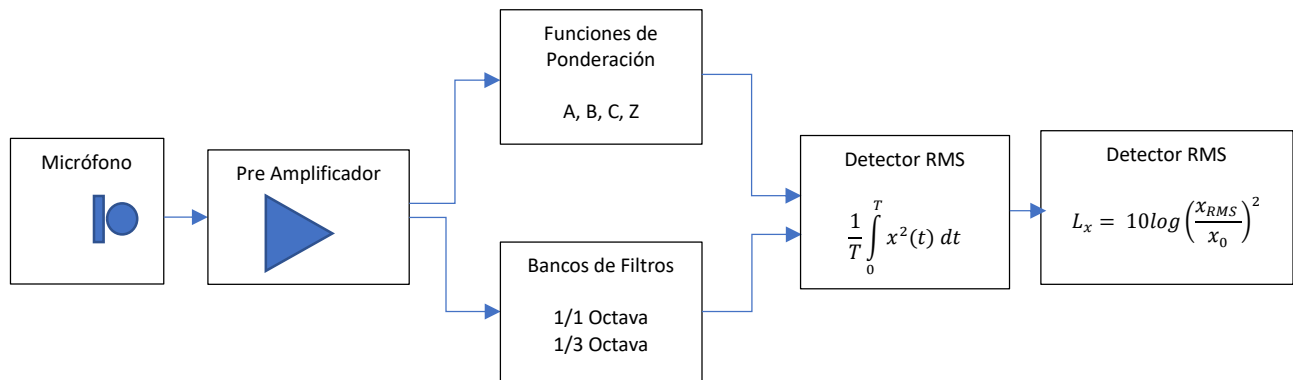
$T_{tf} = 0.25(s)$ Fast

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

El nivel asociado

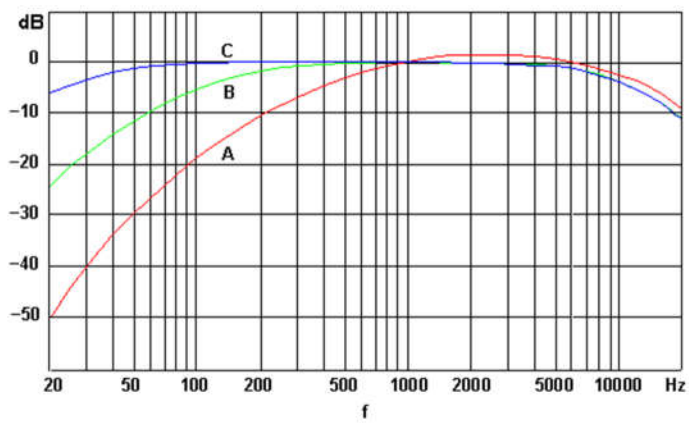
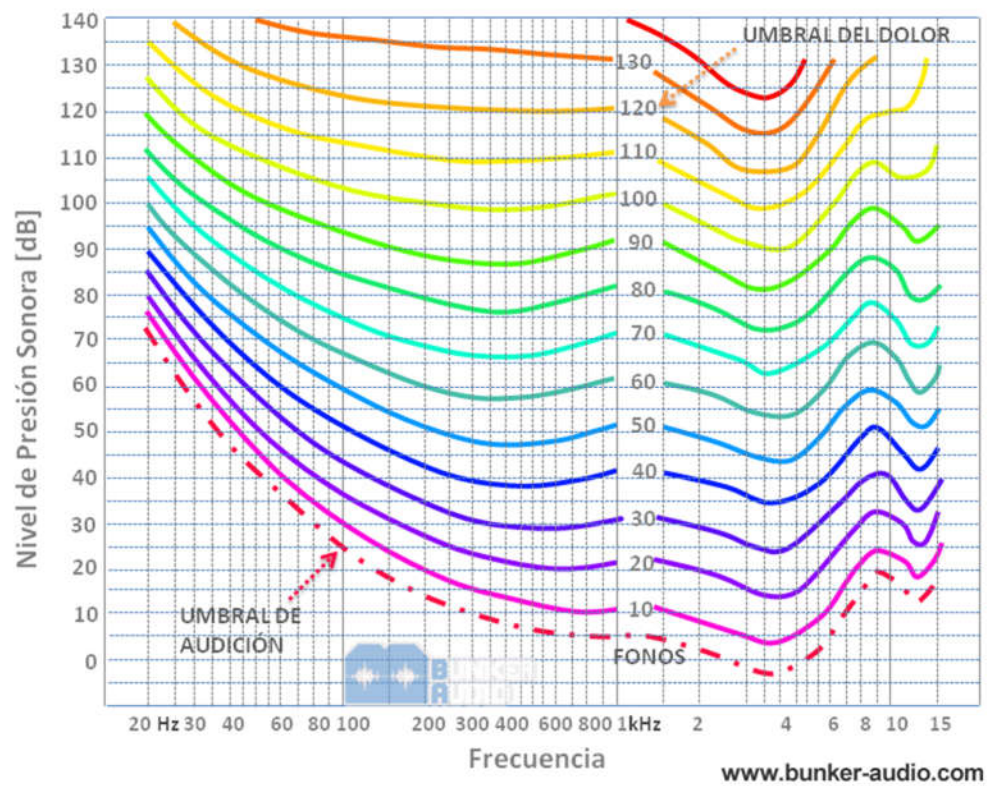
$$L_x = 10 \log \left(\frac{x_{RMS}}{x_0} \right)^2$$

1.1. SONÓMETRO: DIAGRAMA EN BLOQUE



1.2. CURVAS O FUNCIONES DE PONDERACIÓN (A, B, C, Z)

El oído humano no posee respuesta plana, por lo tanto, al evaluar molestia auditiva, ruido urbano, riesgo por ruido laboral no es posible establecer una correlación entre una medición directa y la percepción. Las curvas, A,B,C están basadas en la respuesta del oído humano a distintos niveles según la percepción de sonoridad estandarizadas por las curvas de Fletcher y Munson. La curva Z o Flat no posee ninguna alteración en frecuencia.



Ver las tablas en U-Cursos

