

CAPÍTULO I

ECUACIÓN DE ONDA ACÚSTICA

1.1 - INTRODUCCION

Se usarán los siguientes símbolos

$\vec{r}$: Posición de equilibrio de una partícula de fluido en (x, y, z) .

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (1.1)$$

$\vec{\xi}$: Desplazamiento de la partícula de su posición de equilibrio.

$$\vec{\xi} = \xi_x\hat{x} + \xi_y\hat{y} + \xi_z\hat{z} \quad (1.2)$$

$\vec{u}$: Velocidad de partícula

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z} \quad (1.3)$$

ρ : Densidad instantánea en cualquier punto del fluido.

ρ_0 : Densidad de equilibrio constante del fluido.

s : Condensación en cualquier punto del fluido.

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (1.4)$$

P : Presión instantánea en cualquier punto del fluido.

P_0 : Presión de equilibrio constante en el fluido.

p : Presión sonora.

$$p = P - P_0 \quad (1.5)$$

c : Velocidad de fase de la onda.

Φ : Potencial de velocidad.

$$\vec{u} = \nabla \Phi \quad (1.6)$$

T_K : Temperatura en grados Kelvin ($^{\circ}K$).

T : Temperatura en grados Celcius ($^{\circ}C$)

$$T + 273.15 = T_K \quad (1.7)$$

Partícula de Fluido: Elemento de volumen lo suficientemente grande para contener millones de moléculas y pensar en el fluido como un elemento continuo, y sin embargo tan pequeño que se puede considerar que todas las variables acústicas son casi constantes en todo el elemento de volumen.

Ondas de Amplitud Pequeña: cambios de densidad serán casi despreciables comparados con su valor de equilibrio.

$$|s| \ll 1 \quad (1.8)$$

1.2 – ECUACION DE ESTADO

Ecuación de Estado de un fluido relaciona las fuerzas restauradoras internas con las deformaciones correspondientes.

Ecuación de Estado de un Gas Perfecto

$$P = \rho r T_K \quad (1.9)$$

La cantidad r es una constante que depende del gas

Ecuación de Estado Isotérmica

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1.10)$$

Ecuación de Estado Adiabática

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (1.11)$$

Donde γ es la razón de calores específicos. Expandiendo en serie de Taylor, la presión en función de la densidad queda

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \left(\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^3 + \dots \quad (1.12)$$

Pero como las variaciones son pequeñas los términos de orden superior se desprecian

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 \approx 0 \quad (1.13)$$

$$\left(\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^3 \approx 0 \quad (1.14)$$

Re ordenando

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) \quad (1.15)$$

$$P - P_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) \quad (1.16)$$

Multiplicando y dividiendo por ρ_0 en el segundo miembro

$$P - P_0 = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \quad (1.17)$$

Si las fluctuaciones son pequeñas, se necesitan solamente los términos de más bajo orden y la relación que se obtiene es lineal

$$P - P_0 = \mathbf{B} \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \quad (1.18)$$

Donde $\mathbf{B}$ es el **Módulo Adiabático de Volumen**

$$\mathbf{B} = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \quad (1.19)$$

En términos de la presión acústica y la condensación la ecuación de estado adiabática se puede expresar como

Ecuación de Estado Linealizada

$$p = \mathbf{B}s \quad (1.20)$$

1.2 – ECUACION DE CONTINUIDAD

Ecuación de Continuidad: Relaciona el movimiento de un fluido con su compresión y dilatación. Relación funcional entre la velocidad de partícula $\vec{u}$, y la densidad instantánea ρ .

Elemento de Volumen paralelepípedo rectangular de volumen $dV = dx dy dz$ fijo en el espacio donde viajan las partículas de fluido.

La rapidez neta con que la masa fluye a través de la superficie debe ser igual a la rapidez con que aumenta la masa dentro del volumen.

$$\left\{ \rho u_x - \left[\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx \right] \right\} dy dz = - \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV \quad (1.21)$$

Rapidez Neta con que la Masa Fluye a través de la Superficie

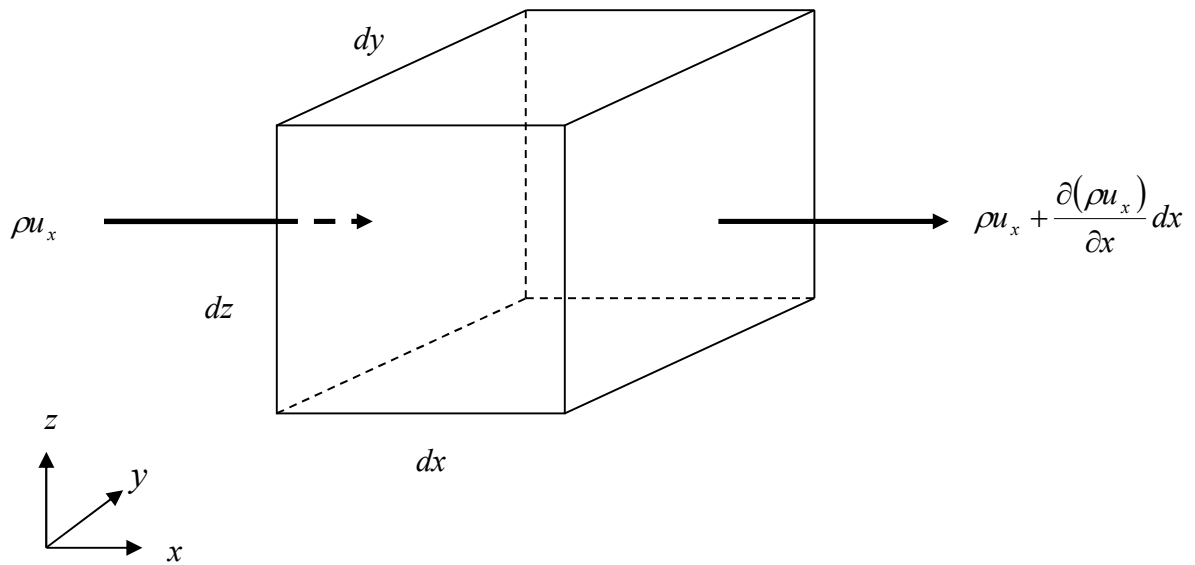


Figura 1.1 Flujo de Masa a través de una partícula de fluido

Similarmente para las componentes y, z de la velocidad del fluido

$$\left\{ \rho u_y - \left[\rho u_y + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dy \right] \right\} dx dz = - \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dV \quad (1.22)$$

$$\left\{ \rho u_z - \left[\rho u_z + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dz \right] \right\} dx dy = - \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dV \quad (1.23)$$

Resumiendo

$$- \left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] \equiv - [\nabla \cdot (\rho \mathbf{\bar{u}})] \quad (1.24)$$

donde $\nabla \cdot ()$ es el operador **Divergencia**

Rapidez Neta con que la Masa Aumenta en el Volumen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.25)$$

Igualemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -[\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] dV \quad (1.26)$$

Simplificamos dV pasamos todo hacia un lado y obtenemos

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] = 0 \quad (1.27)$$

Si consideramos el hecho que

$$\rho = \rho_0(1 + \mathbf{s}) \quad (1.28)$$

Reemplazando

$$\frac{\partial [\rho_0(1 + \mathbf{s})]}{\partial t} + [\nabla \cdot (\rho_0(1 + \mathbf{s})\mathbf{u})] = 0 \quad (1.29)$$

Desarrollando

$$(1 + \mathbf{s}) \frac{\partial [\rho_0]}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial [(1 + \mathbf{s})]}{\partial t} + [\nabla \cdot (\rho_0(1 + \mathbf{s})\mathbf{u})] = 0 \quad (1.30)$$

Como

$$\frac{\partial [\rho_0]}{\partial t} = 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial [(1 + \mathbf{s})]}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \quad (1.32)$$

Además $|\mathbf{s}| \ll 1$, entonces $(\mathbf{s} + 1) \approx 1$, por lo tanto

$$[\nabla \cdot (\rho_0(1 + \mathbf{s})\mathbf{u})] \approx [\nabla \cdot (\rho_0(1)\mathbf{u})] = [\nabla \cdot (\rho_0\mathbf{u})] = \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.33)$$

Obtenemos

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.34)$$

Simplificamos ρ_0 para llegar a

Ecuación de Continuidad Linealizada

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.35)$$

1.3 – ECUACION DE FUERZA SIMPLE: ECUACION DE EULER

Considérese un elemento de fluido $dV = dxdydz$ que se mueve con el fluido con una velocidad $\mathbf{u}$ y que contiene una masa $dm = \rho dV$.

Entonces aplicando la Segunda Ley de Newton

$$d\mathbf{f} = \mathbf{\bar{a}}dm \quad (1.36)$$

$d\mathbf{f}$: Fuerza Neta

$\mathbf{\bar{a}}$: Aceleración

Fuerza Neta

Recordemos que de modo genérico

$$f = PA \quad (1.37)$$

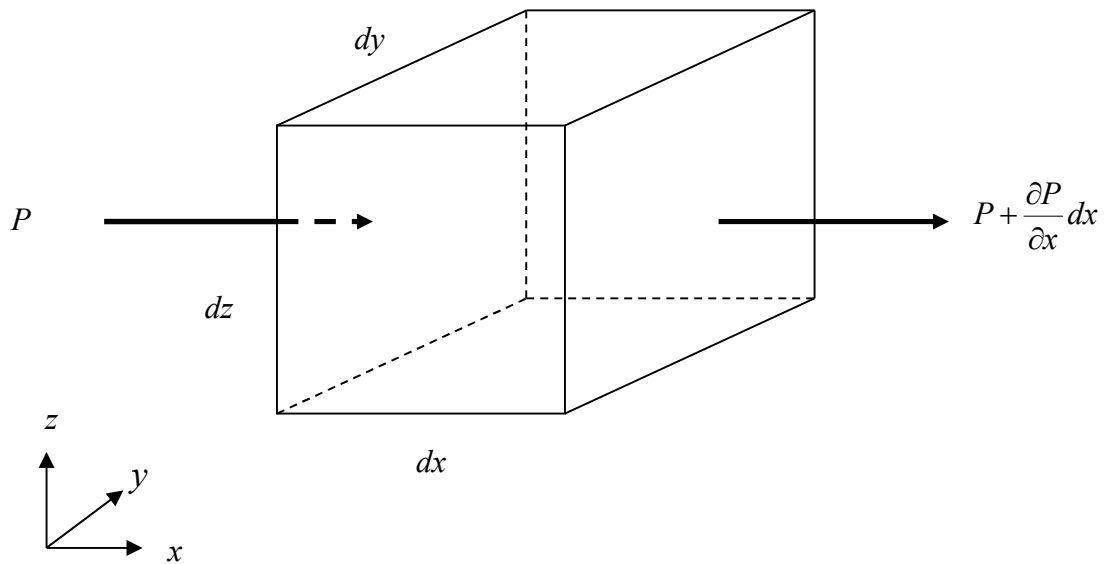


Figura 2.2. Fuerza Neta sobre la partícula de fluido

En ausencia de viscosidad la componente x de la fuerza neta es

$$df_x = \left[P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \right] dydz = -\frac{\partial P}{\partial x} dV \quad (1.38)$$

Usando igual razonamiento las otras componentes de la fuerza neta son

$$df_y - \frac{\partial P}{\partial y} dV \quad (1.39)$$

$$df_z - \frac{\partial P}{\partial z} dV \quad (1.40)$$

Como

$$d\vec{f} = df_x \hat{x} + df_y \hat{y} + df_z \hat{z} \quad (1.41)$$

Obtenemos

$$d\vec{f} = - \left[\frac{\partial P}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial P}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{z} \right] dV \quad (1.42)$$

En notación compacta

$$d\vec{f} = \nabla P dV \quad (1.43)$$

Donde $\nabla()$ es el operador **Gradiente**

Aceleración

La velocidad de partícula del elemento de fluido en un punto (x, y, z) en el tiempo t es

$$\vec{u}(x, y, z, t) \quad (1.44)$$

Cuando transcurre un instante de tiempo $t + dt$ el elemento de fluido se ha desplazado a una posición $(x + dx, y + dy, z + dz)$ y la velocidad es

$$\vec{u}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) \quad (1.45)$$

Por lo tanto la aceleración es

$$\vec{a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - \vec{u}(x, y, z, t)}{dt} \quad (1.46)$$

Pero podemos relacionar los incrementos de posición con el tiempo y las componentes de velocidad

$$dx = u_x dt \quad (1.47)$$

$$dy = u_y dt \quad (1.48)$$

$$dz = u_z dt \quad (1.49)$$

Lo anterior corresponde a una linealización de la trayectoria de la partícula.

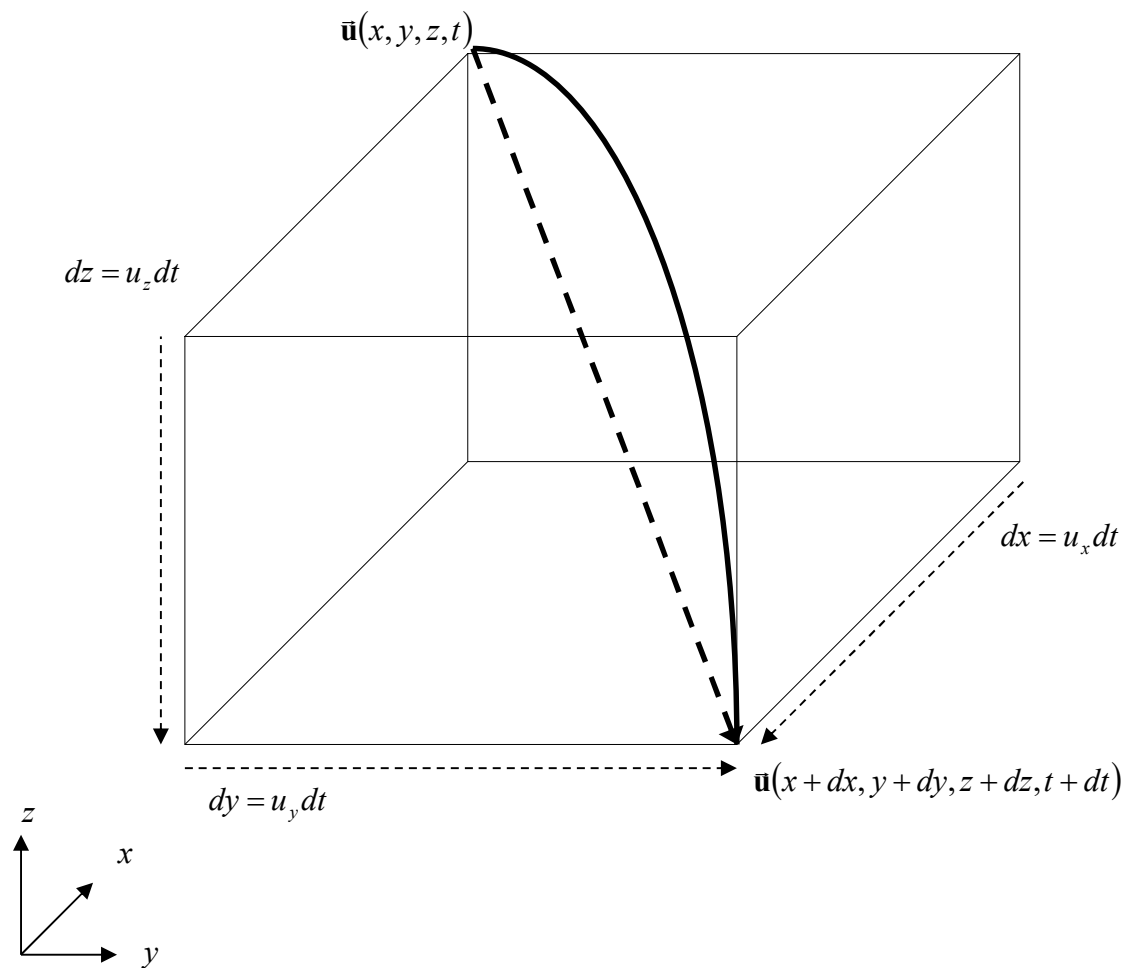


Figura 1.3. Linealización de la trayectoria de la velocidad de partículas

Como se está suponiendo que los incrementos son muy pequeños podemos expandir en serie de Taylor

$$\bar{\mathbf{u}}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = \bar{\mathbf{u}}(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) \quad (1.50)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = \bar{\mathbf{u}}(x, y, z, t) + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z} u_z dt + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} dt \quad (1.51)$$

Reemplazamos

$$\bar{\mathbf{a}} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\bar{\mathbf{u}}(x, y, z, t) + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z} u_z dt + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} dt - \bar{\mathbf{u}}(x, y, z, t)}{dt} \quad (1.52)$$

Restamos términos semejantes y simplificamos dt y obtenemos

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z} u_z + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad (1.53)$$

Se define el operador vectorial

$$(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.54)$$

Entonces la aceleración se puede escribir más brevemente

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} \quad (1.55)$$

Como

$$dm = \rho dV \quad (1.56)$$

Usando la Segunda Ley de Newton

$$d\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{a}} dm \quad (1.57)$$

$$-\nabla P dV = \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} \right] dV \quad (1.58)$$

Ecuación de Euler

$$-\nabla P = \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} \right] \quad (1.59)$$

Podemos considerar las siguientes simplificaciones

$$|\mathbf{s}| \ll 1 \rightarrow \rho \approx \rho_0 \quad (1.60)$$

$$|(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}| \ll \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right| \quad (1.61)$$

Considerando que la componente estática (atmosférica) de la presión desaparece

$$\nabla P = \nabla p \quad (1.62)$$

Obtenemos

Ecuación de Fuerza no Viscosa Linealizada

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla p \quad (1.63)$$

1.4 – ECUACION DE ONDA LINEALIZADA

Combinaremos la Ecuación de Estado, la Ecuación de Continuidad Linealizada y la Ecuación de Fuerza no Viscosa Linealizada

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}\mathbf{s} \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.65)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla \mathbf{p} \quad (1.66)$$

Tomamos la divergencia en la ecuación de fuerza linealizada

$$\nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (-\nabla \mathbf{p}) \quad (1.67)$$

Intercambiamos divergencia y derivada temporal, debido a que ambos operadores son lineales y como la divergencia del gradiente es el operador **Laplaciano**

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) = -\nabla^2 \mathbf{p} \quad (1.68)$$

Tomemos la derivada temporal de la ecuación de continuidad linealizada

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (1.69)$$

Obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \quad (1.70)$$

Iguamos los términos que tienen $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})$ entre sí

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 \mathbf{p} \quad (1.71)$$

Usando la ecuación de estado linealizada

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{B}} \quad (1.72)$$

$$\nabla^2 \mathbf{p} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{B}} \right) \quad (1.73)$$

$$\nabla^2 \mathbf{p} = \frac{\rho_0}{\mathbf{B}} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \quad (1.74)$$

Ecuación de Onda Linealizada

$$\nabla^2 \mathbf{p} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \quad (1.75)$$

Velocidad de Propagación del Sonido

$$c = \sqrt{\frac{\mathbf{B}}{\rho_0}} \quad (1.76)$$

La ecuación de estado linealizada se puede escribir en forma más conveniente como

$$\mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{s} \quad (1.77)$$

Como la presión $\mathbf{p}$ y la condensación $\mathbf{s}$ son proporcionales esta última satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{s} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \quad (1.78)$$

Por otra parte como la condensación y la densidad instantánea ρ están relacionadas linealmente

$$\nabla^2 \rho = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \quad (1.79)$$

En virtud de que el rotacional del gradiente de una función es igual a cero

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad (1.80)$$

Además supondremos que no existen capas de frontera, vórtices ondas cortante y turbulencia, para los procesos acústicos de amplitud infinitesimal, entonces

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (1.81)$$

Por lo tanto existe una función escalar Φ llamada ***Potencial de Velocidad*** que satisface

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0 \quad (1.82)$$

Potencial de Velocidad

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \quad (1.83)$$

Si sustituimos esta última ecuación en la ecuación de fuerza linealizada

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) = -\nabla p \quad (1.84)$$

Como podemos intercambiar la derivada temporal por el gradiente, ya que son funciones lineales

$$\nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\nabla p \quad (1.85)$$

Podemos reunir ambos términos en una sola ecuación

$$\nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p \right) = 0 \quad (1.86)$$

En ausencia de excitación acústica la cantidad entre paréntesis se puede hacer cero, entonces

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.87)$$

Si la sustituimos en la ecuación de onda con respecto a la presión sonora

$$\nabla^2 \left(-\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \left(-\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)}{\partial t^2} \quad (1.88)$$

$$-\rho_0 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\rho_0 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)}{\partial t^2} \quad (1.89)$$

Simplificamos la densidad de equilibrio y los signos negativos

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)}{\partial t^2} \quad (1.90)$$

Intercambiamos operadores

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Phi) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \quad (1.91)$$

Integrando con respecto al tiempo observamos que el potencial de velocidad satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1.92)$$

1.5 –VELOCIDAD DEL SONIDO EN FLUIDOS

Combinando las ecuaciones anteriores veíamos que

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\text{Adiabático}}} \quad (1.93)$$

Para ondas acústicas ordinarias

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\text{Adiabático}} = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \quad (1.94)$$

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} \quad (1.95)$$

Considerando los valores normales del aire para 0°C y presión atmosférica normal $P_0 = 1.103 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, densidad de equilibrio $\rho_0 = 1.293 \text{ kg/m}^3$ y $\gamma = 1.402$ obtenemos la velocidad del sonido

$$c_0 = \sqrt{1.402 \frac{1.103 \times 10^5}{1.293}} = 331.6 \text{ m/s} \quad (1.96)$$

Considerando la dependencia de la temperatura

$$c = c_0 \sqrt{\frac{T_K}{273}} \quad (1.97)$$

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{T}{273}} \quad (1.98)$$

1.6 –ONDAS ARMONICAS PLANAS

Si todas las variables acústicas son funciones de una única coordenada espacial, la fase de cualquier es constante en cualquier superficie perpendicular a esta coordenada. A tal onda se le llama **Onda Plana**. Si se elige el sistema de coordenadas de tal forma que esta onda se propague por el eje x la ecuación de onda se reduce a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \quad (1.99)$$

donde

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(x, t) \quad (1.100)$$

La forma compleja de la solución armónica para la presión acústica de una onda plana es

$$\mathbf{p}(x, t) = \mathbf{A}e^{j(\omega t - kx)} + \mathbf{B}e^{j(\omega t + kx)} \quad (1.101)$$

La velocidad de partícula se puede obtener de

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \mathbf{p} \quad (1.102)$$

Que para una coordenada es

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \quad (1.103)$$

Luego

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} dt \quad (1.104)$$

Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} = -jk(\mathbf{A}e^{j(\omega t - kx)} - \mathbf{B}e^{j(\omega t + kx)}) \quad (1.105)$$

$$\int \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} dt = \frac{-jk}{j\omega}(\mathbf{A}e^{j(\omega t - kx)} - \mathbf{B}e^{j(\omega t + kx)}) \quad (1.106)$$

Finalmente considerando que

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (1.107)$$

$$\mathbf{u}(x, t) = \left[\frac{\mathbf{A}}{\rho_0 c} e^{j(\omega t - kx)} - \frac{\mathbf{B}}{\rho_0 c} e^{j(\omega t + kx)} \right] \hat{x} \quad (1.108)$$

Si se escribe considerando la dirección de propagación

$$\mathbf{p}_+ = \mathbf{A}e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{Dirección de Propagación Positiva}$$

$$\mathbf{p}_- = \mathbf{B}e^{j(\omega t + kx)} \quad \text{Dirección de Propagación Negativa}$$

Las velocidades de partícula

$$\mathbf{u}_+ = + \frac{\mathbf{p}_+}{\rho_0 c} \quad (1.109)$$

$$\mathbf{u}_- = - \frac{\mathbf{p}_-}{\rho_0 c} \quad (1.110)$$

La condensación

$$\mathbf{s}_+ = + \frac{\mathbf{p}_+}{\rho_0 c^2} \quad (1.111)$$

$$\mathbf{s}_- = - \frac{\mathbf{p}_-}{\rho_0 c^2} \quad (1.112)$$

El potencial de velocidad

$$\Phi_+ = - \frac{\mathbf{p}_+}{j\omega\rho_0} \quad (1.113)$$

$$\Phi_- = + \frac{\mathbf{p}_-}{j\omega\rho_0} \quad (1.114)$$

Para una onda plana que viaja en una cierta dirección arbitraria, es plausible intentar la solución

$$\mathbf{p}(x, y, z, t) = \mathbf{A} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \quad (1.115)$$

Si es substituida en

$$\nabla^2 \mathbf{p} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \quad (1.116)$$

Se demuestra que la solución es válida si y sólo si

$$\frac{\omega}{c} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (1.117)$$

Se define **Vector de Propagación**

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad (1.118)$$

Tiene magnitud ω/c y vector posición

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (1.119)$$

Entonces

$$\mathbf{p}(\vec{r}, t) = \mathbf{A} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (1.120)$$

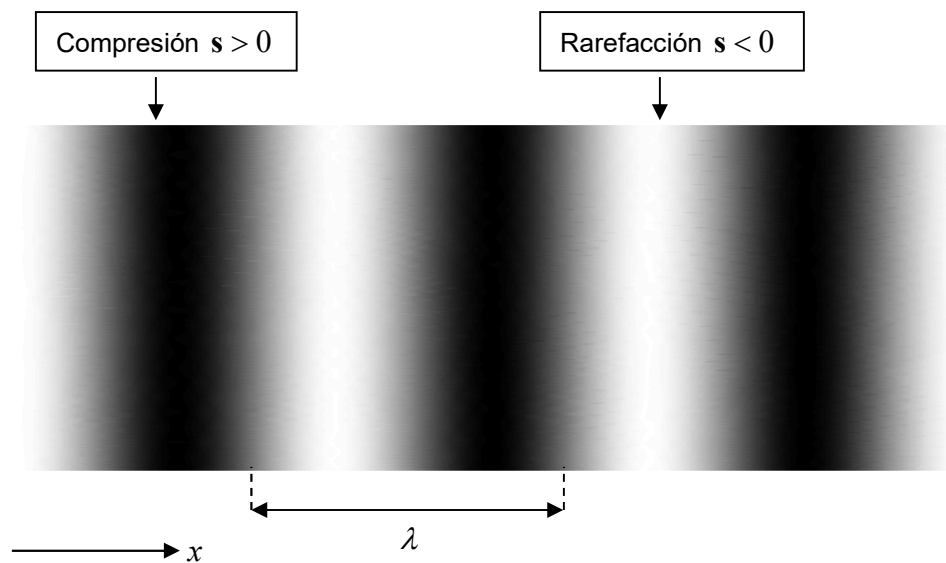


Figura 1.4. Onda Plana viajando en la dirección x

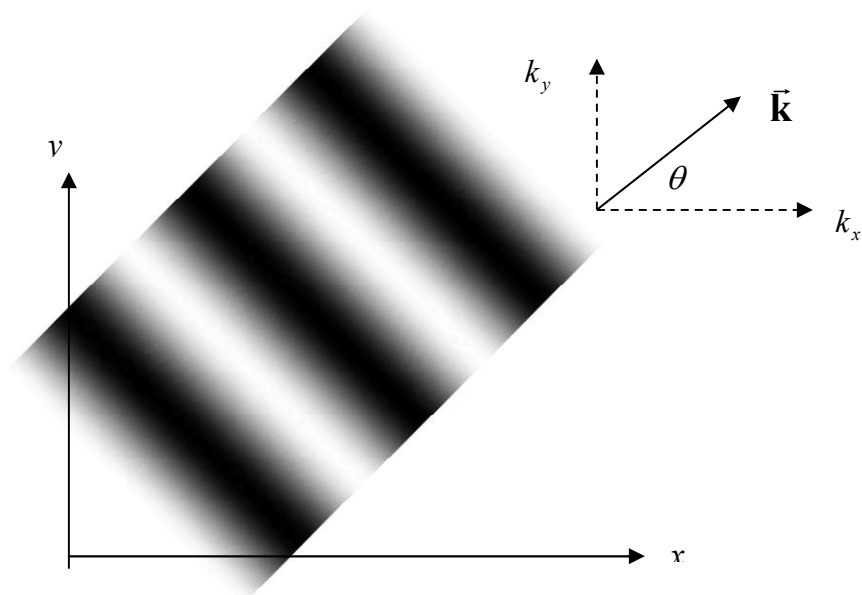


Figura 1.5. Onda Plana viajando en dirección arbitraria

1.7 –DENSIDAD DE ENERGÍA ACUSTICA E INTENSIDAD ACUSTICA DE ONDAS PLANAS

Energía Cinética

Energía cinética básicamente se define en términos de la masa y la velocidad, en nuestro caso, para ondas acústicas que se desplazan por un volumen pequeño V_0

$$E_K = \frac{1}{2} \rho_0 V_0 |\mathbf{u}|^2 \quad (1.121)$$

Energía Potencial

Que corresponde al trabajo realizado por la presión sonora para modificar el volumen de V_0 a V

$$E_P = - \int_{V_0}^V \mathbf{p} dV \quad (1.122)$$

$$E_P = \int_{V_0}^V \mathbf{p} \frac{V_0}{\rho_0 c^2} d\mathbf{p} \quad (1.123)$$

$$E_P = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}^2}{\rho_0 c^2} V_0 \quad (1.124)$$

Energía Total

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2} \rho_0 V_0 |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}^2}{\rho_0 c^2} V_0 \quad (1.125)$$

$$E = \frac{1}{2} \rho_0 \left(|\mathbf{u}|^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{\rho_0 c^2} \right) V_0 \quad (1.126)$$

Densidad de Energía Instantánea

$$D_i = \frac{E}{V_0} = \frac{1}{2} \rho_0 \left(|\mathbf{u}|^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{\rho_0 c^2} \right) \quad (1.127)$$

Densidad de Energía Promedio

$$D = \frac{1}{T} \int_0^T D_i dt \quad (1.128)$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{PU}{c} = \frac{1}{2} \frac{P^2}{\rho_0 c^2} = \frac{1}{2} \rho_0 c^2 U^2 \quad (1.129)$$

Donde

P : Amplitud Máxima de Presión Sonora
 U : Amplitud Máxima de Velocidad de Partículas

Intensidad de Energía Acústica de Ondas Planas

Se define como el flujo de energía acústica, por unidad de área y de tiempo

$$\mathbf{I} = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} \quad (1.130)$$

En forma más específica

$$\mathbf{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p \mathbf{u} dt \quad (1.131)$$

Para una onda sonora plana que viaja en la dirección positiva

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} P_+ U_+ \hat{x} = \frac{1}{2} \frac{P_+^2}{\rho_0 c} \hat{x} \quad (1.132)$$

Para una onda sonora plana que viaja en la dirección negativa

$$\mathbf{I} = -\frac{1}{2} P_- U_- \hat{x} = -\frac{1}{2} \frac{P_-^2}{\rho_0 c} \hat{x} \quad (1.133)$$

Considerando la definición de **Amplitud Efectiva** o **Amplitud RMS** para una función periódica, $f(t)$ de período T definida por

$$F_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (1.134)$$

Entonces para ondas armónicas

$$P_{RMS} = \frac{P}{\sqrt{2}} \quad (1.135)$$

$$U_{RMS} = \frac{U}{\sqrt{2}} \quad (1.136)$$

Finalmente

$$\mathbf{I}_{\pm} = \pm P_{RMS} U_{RMS} \hat{x} = \frac{P_{RMS}^2}{\rho_0 c} \hat{x} \quad (1.137)$$

1.8 –IMPEDANCIA ACUSTICA ESPECIFICA

Se define como la razón de la presión sonora en un medio a la velocidad de partículas

Impedancia Acústica Específica

$$z = \frac{p}{u} \quad (1.138)$$

Para ondas planas propagándose en sentido positivo esta razón es

$$z = +\rho_0 c \quad (1.139)$$

Para ondas planas propagándose en sentido negativo esta razón es

$$z = -\rho_0 c \quad (1.140)$$

La cantidad $\rho_0 c$ es conocida como **Impedancia Característica**

Para ondas estacionarias u ondas divergentes la impedancia acústica específica es una cantidad compleja

$$z = r + jx \quad (1.141)$$

r : **Resistencia Acústica Específica**

x : **Reactancia Acústica Específica**

1.9 –ONDAS ESFERICAS

La ecuación de onda es

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1.142)$$

El operador Laplaciano en coordenadas esféricas es

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (1.143)$$

Donde

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

Entonces si reemplazamos en la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \quad (1.144)$$

En el caso de que las ondas tengan simetría radial, esto es no dependen de los ángulos θ, ϕ , el Laplaciano es

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.145)$$

La ecuación de onda para campos de presión radialmente simétricos es

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \quad (1.146)$$

La conservación de la energía lleva a esperar que la amplitud de presión decaiga con una razón $1/r$, de tal manera que la cantidad $r\mathbf{p}$ pueda tener una amplitud independiente de r . Si se trata a $r\mathbf{p}$ como la variable dependiente, se puede re escribir la ecuación de onda como

$$\frac{\partial^2 (r\mathbf{p})}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r\mathbf{p})}{\partial t^2} \quad (1.147)$$

Lo demostraremos a continuación

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial (r\mathbf{p})}{\partial r} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r\mathbf{p})}{\partial t^2} \quad (1.148)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\mathbf{p} \frac{\partial r}{\partial r} + r \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} \right] = \frac{1}{c^2} r \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \quad (1.149)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\mathbf{p} + r \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} \right] = \frac{1}{c^2} r \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \quad (1.150)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} r \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \quad (1.151)$$

Sumando términos semejantes y dividiendo por r

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \quad (1.152)$$

Si se considera $r\mathbf{p}$ como una sola variable la solución de una armónica compleja

$$r\mathbf{p}(r, t) = \mathbf{A} e^{j(\omega t - kr)} \quad (1.153)$$

Finalmente

$$\mathbf{p}(r, t) = \frac{\mathbf{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} = \frac{(\mathbf{A}_R + j\mathbf{A}_I) (\cos(\omega t - kr) + j\sin(\omega t - kr))}{r} \quad (1.154)$$

para propósitos prácticos

$$= \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$$

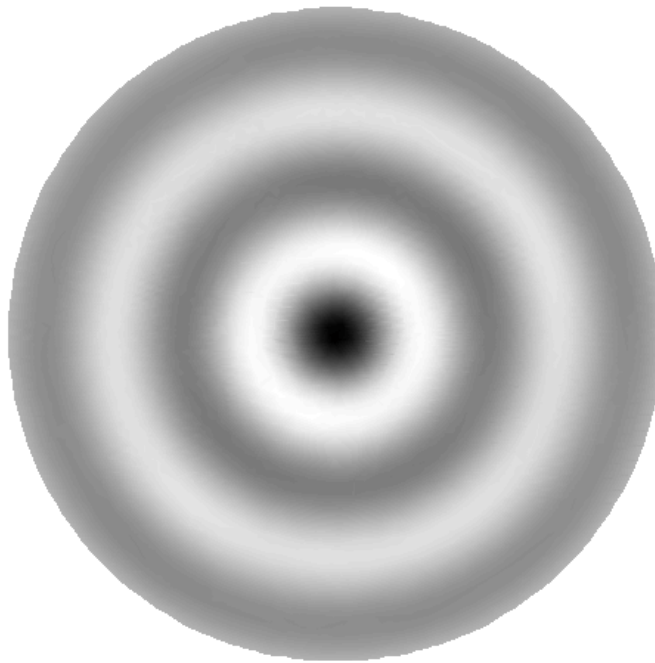


Figura 1.6. Onda Esférica

La relación entre presión sonora y potencial de velocidad

$$\mathbf{p} = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.155)$$

Despejamos e integramos respecto al tiempo

$$\Phi = -\frac{1}{\rho_0} \int \mathbf{p} dt \quad (1.156)$$

Luego

$$\Phi = -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{\mathbf{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} dt \quad (1.157)$$

$$\Phi = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\mathbf{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (1.158)$$

Finalmente

$$\Phi = -\frac{1}{j\omega\rho_0} \mathbf{p} \quad (1.159)$$

Para calcular la velocidad de partículas usamos el potencial de velocidad

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \quad (1.160)$$

El operador gradiente en coordenadas esféricas es

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (1.161)$$

En nuestro caso al contar con simetría radial es

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} \quad (1.162)$$

Aplicándolo al potencial de velocidad

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} \quad (1.163)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\mathbf{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} \right] \hat{r} \quad (1.164)$$

$$\mathbf{u} = \left[\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\mathbf{A}}{r^2} e^{j(\omega t - kr)} + \frac{jk}{j\omega\rho_0} \frac{\mathbf{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} \right] \hat{r} \quad (1.165)$$

Factorizamos

$$\mathbf{u} = \left[\frac{1}{jkr} + 1 \right] \frac{k}{\omega\rho_0} \frac{\mathbf{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} \hat{r} \quad (1.166)$$

Como

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (1.167)$$

Obtenemos

$$\bar{\mathbf{u}} = \left[1 - \frac{j}{kr} \right] \frac{1}{\rho_0 c} \frac{\mathbf{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.168)$$

Finalmente denotando adecuadamente

$$\bar{\mathbf{u}} = \left[1 - \frac{j}{kr} \right] \frac{\mathbf{p}}{\rho_0 c} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.169)$$

Las variables acústicas observadas se obtienen si se consideran las partes reales.

En contraste de las ondas planas, la velocidad de partículas no están en fase con la presión. La impedancia acústica específica no es $\rho_0 c$, si no

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}} \quad (1.170)$$

$$\mathbf{z} = \frac{\frac{\mathbf{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)}}{\left[1 - \frac{j}{kr} \right] \frac{1}{\rho_0 c} \frac{\mathbf{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)}} \quad (1.171)$$

Simplificando obtenemos

$$\mathbf{z} = \frac{\rho_0 c}{\left[1 - \frac{j}{kr} \right]} \quad (1.172)$$

$$\mathbf{z} = \rho_0 c \frac{kr}{kr - j} \quad (1.173)$$

Separamos parte real e imaginaria

$$\mathbf{z} = \rho_0 c \frac{(kr)^2}{1 + (kr)^2} + j \rho_0 c \frac{1}{1 + (kr)^2} \quad (1.174)$$

Recordando que

$$\mathbf{z} = r + jx \quad (1.175)$$

$$r = \rho_0 c \frac{(kr)^2}{1 + (kr)^2} \quad : \quad \textbf{Resistencia Acústica Específica}$$

$$x = \rho_0 c \frac{1}{1 + (kr)^2} \quad : \quad \textbf{Reactancia Acústica Específica}$$

Al observar la impedancia como un número complejo este puede denotarse en términos de módulo y fase

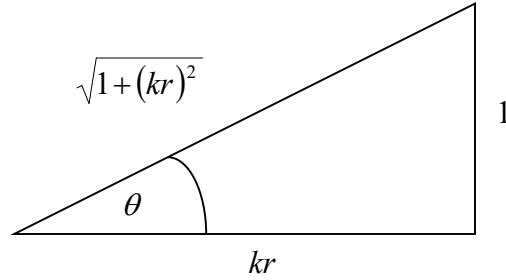


Figura 1.7. Relación de Fase Impedancia Acústica Específica

$$\mathbf{z} = \rho_0 c \frac{kr}{\sqrt{1 + (kr)^2}} e^{j\theta} \quad (1.176)$$

$$\mathbf{z} = \rho_0 c \cos \theta e^{j\theta} \quad (1.177)$$

Donde

$$\cot \theta = kr \quad (1.178)$$

Si observamos los valores límites a grandes distancias de la fuente para la parte real de la impedancia acústica específica

$$\lim_{(kr) \rightarrow \infty} \rho_0 c \frac{(kr)^2}{1 + (kr)^2} = \rho_0 c \quad (1.179)$$

Si observamos los valores límites a grandes distancias de la fuente para la parte real de la impedancia acústica específica

$$\lim_{(kr) \rightarrow \infty} \rho_0 c \frac{1}{1 + (kr)^2} = 0 \quad (1.180)$$

De esto podemos concluir que a grandes distancias la presión sonora y la velocidad de partículas están casi en fase, en consecuencia, la onda esférica asume las características de una onda plana.

Si consideramos la magnitud absoluta de la impedancia acústica específica esta es

$$z = \frac{P}{U} = \rho_0 c \frac{kr}{\sqrt{1 + (kr)^2}} = \rho_0 c \cos \theta \quad (1.181)$$

Donde

P : Amplitud Máxima de Presión Sonora
 U : Amplitud Máxima de Velocidad de Partículas

Considerando la parte real, sin perder generalidad la presión y la velocidad de partículas

$$p(x,t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr) \quad (1.182)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\rho_0 c} \frac{A}{r} \frac{1}{\cos \theta} \cos(\omega t - kr - \theta) \quad (1.183)$$

Calculando la intensidad sonora en términos de las amplitudes

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T P \cos(\omega t - kr) U \cos(\omega t - kr - \theta) dt = \frac{PU \cos \theta}{2} = \frac{P^2}{2\rho_0 c} \quad (1.184)$$

La potencia de la fuente es

$$W = 4\pi r^2 I \quad (1.185)$$

1.8 – NIVEL DE PRESIÓN SONORA, NIVEL DE INTENSIDAD SONORA Y NIVEL DE POTENCIA SONORA

Nivel de Presión Sonora

$$L_p = 10 \log \left(\frac{P_{RMS}}{P_0} \right)^2 \quad (1.186)$$

$$L_p = 20 \log \left(\frac{P_{RMS}}{P_0} \right) \quad (1.187)$$

$$P_0 = 2 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$$

Nivel de Intensidad Sonora

$$L_I = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (1.188)$$

$$I_0 = 1 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Nivel de Potencia Sonora

$$L_W = 10 \log \left(\frac{W}{W_0} \right) \quad (1.189)$$

$$W_0 = 1 \times 10^{-12} W$$