

CAPÍTULO IV
RADIACIÓN Y RECEPCIÓN DE ONDAS
ACÚSTICAS

4.1 – RADIACIÓN POR UNA ESFERA PULSANTE

Supongamos una esfera cuyo radio varíe senoidalmente con respecto al tiempo. Obviamente generará ondas esféricas

$$\mathbf{p}(r,t) = \frac{\mathbf{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (4.1)$$

Si el medio es infinito no hay reflexión. Para evaluar $\mathbf{A}$ partiendo de la condición de frontera, la componente radial de la velocidad de partículas debe ser igual a la velocidad radial de la superficie de la esfera

$$\bar{\mathbf{u}}(a,t) = U_0 e^{j\omega t} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.2)$$

a : Radio de la esfera
 U_0 : Amplitud de velocidad radial de la superficie de la esfera
 ω : Frecuencia angular

Además se debe considerar que la radiación esférica se producirá si

$$\frac{U_0}{\omega} \ll a \quad (4.3)$$

Para poder realizar una adecuada evaluación de esta condición de continuidad, debemos observar la impedancia acústica específica sobre la superficie de la esfera

$$\mathbf{z}(a) = \frac{\mathbf{p}(a,t)}{\bar{\mathbf{u}}(a,t)} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{z}(a) = \rho_0 c \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} + j\rho_0 c \frac{1}{1 + (ka)^2} \quad (4.5)$$

Podemos denotar esta impedancia en forma compacta

$$\mathbf{z} = \rho_0 c \cos \theta_a e^{j\theta_a} \quad (4.6)$$

Donde

$$\cot \theta_a = ka \quad (4.7)$$

Entonces la presión sonora en la superficie de la esfera es

$$\mathbf{p}(a,t) = \mathbf{z}(a) \bar{\mathbf{u}}(a,t) \quad (4.8)$$

$$\mathbf{p}(a,t) = \rho_0 c U_0 \cos \theta_a e^{j(\omega t + \theta_a)} \quad (4.9)$$

O bien en forma extendida

$$\mathbf{p}(a,t) = \rho_0 c U_0 \left[\frac{(ka)^2}{1+(ka)^2} + j\rho_0 c \frac{1}{1+(ka)^2} \right] e^{j\omega t} \quad (4.10)$$

Para otros puntos $r \geq a$ la presión sonora es

$$\mathbf{p}(a,t) = \rho_0 c U_0 \frac{a}{r} \cos \theta_a e^{j[\omega t - k(r-a) + \theta_a]} \quad r \geq a \quad (4.11)$$

O bien en la forma extendida para otros puntos $r \geq a$ la presión sonora es

$$\mathbf{p}(r,t) = \rho_0 c U_0 \frac{a}{r} \left[\frac{(ka)^2}{1+(ka)^2} + j\rho_0 c \frac{1}{1+(ka)^2} \right] e^{j[\omega t - k(r-a)]} \quad r \geq a \quad (4.13)$$

La intensidad acústica es

$$I = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2\rho_0 c} \quad (4.14)$$

Reemplazando

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c U_0^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos^2 \theta_a \quad (4.15)$$

Denotando en forma extendida la intensidad acústica

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c U_0^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{ka}{1+(ka)^2} \quad (4.16)$$

Si el radio de la fuente es pequeño comparado con la longitud de onda, es decir

$$ka \ll 1 \quad (4.17)$$

Esto significa que

$$(ka)^2 \approx 0 \quad (4.18)$$

La impedancia acústica específica sobre la superficie de la esfera puede ser aproximada. Esta expresión significa que la impedancia es fuertemente reactiva dependiendo de la masa del fluido circundante

$$\mathbf{z}(a) \approx \rho_0 c ka (ka + j) \quad ka \ll 1 \quad (4.19)$$

La presión sonora es aproximadamente

$$\mathbf{p}(r,t) = \rho_0 c k a (ka + j) U_0 \frac{a}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad ka \ll 1 \quad (4.20)$$

Desarrollando

$$\mathbf{p}(r,t) \approx \rho_0 c (ka)^2 U_0 \frac{a}{r} e^{j(\omega t - kr)} + j \rho_0 c k a U_0 \frac{a}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad ka \ll 1 \quad (4.21)$$

Pero la parte real desaparece porque $(ka)^2 \approx 0$, finalmente

$$\mathbf{p}(r,t) \approx j \rho_0 c k a U_0 \frac{a}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad ka \ll 1 \quad (4.22)$$

La presión está en una fase aproximada de 90° respecto a la velocidad de partículas y la intensidad es desvaneciente

$$I \approx \frac{1}{2} \rho_0 c U_0 \left(\frac{a}{r} \right)^2 (ka)^2 \quad ka \ll 1 \quad (4.23)$$

Por dicha expresión podemos concluir que fuentes pequeñas en relación a la longitud de onda son malos radiadores de sonido

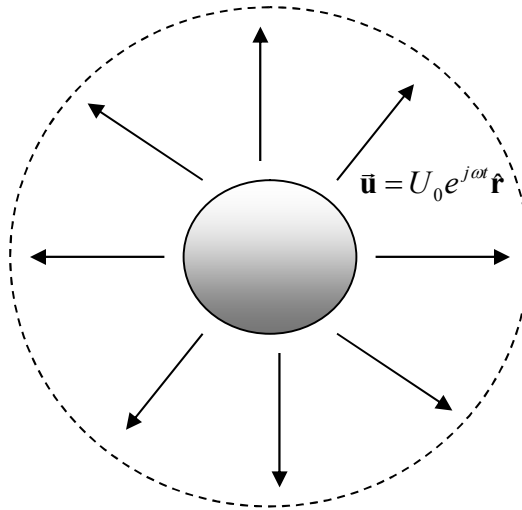


Figura 4.1. Radiación de una Esfera Pulsante

4.2 – PODER DE UNA FUENTE

Consideremos una fuente sonora de tamaño y forma arbitraria que emite una sola frecuencia. La velocidad de partículas es

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{U}(x, y, z) e^{j[\omega t + \phi(x, y, z)]} \quad (4.24)$$

Esta fuente desplaza un volumen de fluido

$$Q e^{j\omega t} = \oint_S \vec{u} \cdot \hat{n} \, dS \quad (4.25)$$

$\hat{n}$: Vector normal unitario a la superficie de la fuente

Donde

Q : **Poder Complejo de la Fuente**

Para una esfera pulsante

$$Q = 4\pi a^2 U_0 \quad (4.26)$$

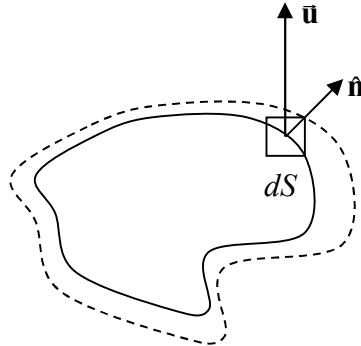


Figura 4.2. Poder de una Fuente

4.3 – RECIPROCIDAD ACUSTICA

El principio de reciprocidad acústica relaciona fronteras, campos sonoros fuentes y receptores. Supondremos dos cuerpos en el espacio, los cuales pueden actuar como receptores y como emisores de ondas sonoras

Caso A	:	Cuerpo 1 Emisor	Cuerpo 2 Receptor
Caso B	:	Cuerpo 2 Emisor	Cuerpo 1 Receptor

Además estos están inmersos en un volumen V que no contiene a las fuentes y de superficie S , como es mostrado en la figura

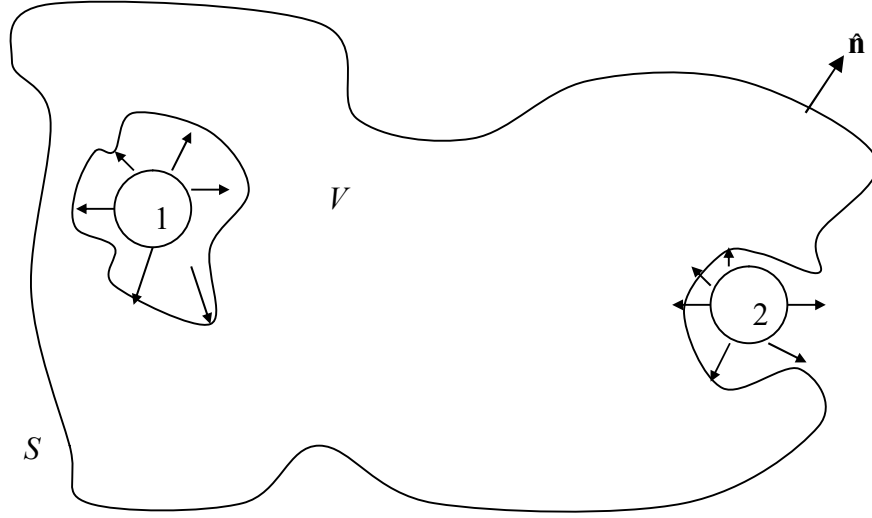


Figura 4.3. Diagrama usado para derivar el Principio de Reciprocidad Acústica

Sean

Φ_1 : **Potencial de Velocidad de Partículas de la Fuente 1**

Φ_2 : **Potencial de Velocidad de Partículas de la Fuente 2**

Usando el Teorema de Green

$$\oint_S (\Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1) \cdot \hat{n} \, dS = \int_V (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1) \, dV \quad (4.27)$$

Dado que el potencial de velocidad cumple con la ecuación de onda y que ambas fuentes emiten a frecuencias iguales

$$\nabla^2 \Phi_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \quad (4.28)$$

La solución propuesta es

$$\Phi_1 = \Phi_1(x, y, z) e^{j\omega t} \quad (4.29)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} \quad (4.30)$$

La solución propuesta es

$$\Phi_2 = \Phi_2(x, y, z)e^{j\omega t} \quad (4.31)$$

Las ecuaciones de Helmholtz asociadas son

$$\nabla \Phi_1 = -\mathbf{k}^2 \Phi_1 \quad (4.32)$$

$$\nabla \Phi_2 = -\mathbf{k}^2 \Phi_2 \quad (4.33)$$

Reemplazando tenemos

$$\oint_S (\Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1) e^{j\omega t} \, dV \quad (4.34)$$

Simplificamos los términos $e^{j\omega t}$ y reemplazamos las ecuaciones de Helmholtz asociadas

$$\oint_S (\Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V (\Phi_1 (-\mathbf{k}^2 \Phi_2) - \Phi_2 (-\mathbf{k}^2 \Phi_1)) \, dV \quad (4.35)$$

Finalmente reduciendo los términos semejantes

$$\oint_S (\Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (4.36)$$

Recordemos que el potencial de velocidad se relaciona con la presión sonora y la velocidad de partículas de la siguiente manera

$$\mathbf{p} = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \quad (4.38)$$

Entonces

$$\mathbf{p}_1 = -j\omega\rho_0\Phi_1 \quad \mathbf{p}_2 = -j\omega\rho_0\Phi_2 \quad (4.39)$$

$$\mathbf{u}_1 = \nabla \Phi_1 \quad \mathbf{u}_2 = \nabla \Phi_2 \quad (4.40)$$

Reemplazando

$$\oint_S \left(\frac{\mathbf{p}_1}{-j\omega\rho_0} \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{p}_2}{-j\omega\rho_0} \mathbf{u}_1 \right) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (4.41)$$

Simplificando el término $\frac{1}{-j\omega\rho_0}$ finalmente obtenemos

Principio de Reciprocidad Acústica

$$\oint_S (\mathbf{p}_1 \bar{\mathbf{u}}_2 - \mathbf{p}_2 \bar{\mathbf{u}}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \quad (4.42)$$

Principio de Reciprocidad Acústica: Este principio establece que si se intercambian las posiciones de una pequeña fuente simple y un pequeño receptor dentro de un medio invariante, la señal recibida será la misma.

Para propósitos de esta descripción desarrollaremos esta fórmula de una manera simple pero restringida. Sean

- S_α : Porción de S lejos de las fuentes
- R : Distancia de las fuentes
- Ω : Angulo sólido de S_α medido desde las fuentes

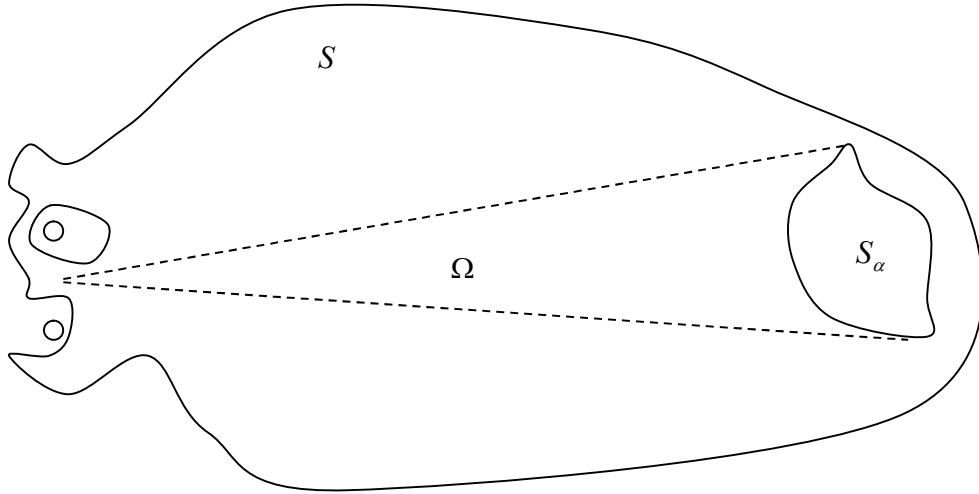


Figura 4.41. Reciprocidad Acústica en Campo Lejano

La presión sonora y la velocidad de partículas son aproximadamente

$$|\mathbf{p}| \rightarrow \frac{A}{R} e^{-\alpha R} \quad (4.43)$$

$$|\bar{\mathbf{u}}| \rightarrow \frac{A}{\rho_0 c R} e^{-\alpha R} \hat{\mathbf{R}} \quad (4.44)$$

Luego

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{S_\infty} \mathbf{p}_1 \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\Omega A_1 A_2}{\rho_0 c} e^{-2\alpha R} = 0 \quad (4.45)$$

De esto podemos sacar las siguientes conclusiones

- Las contribuciones son insignificantes lejos de las fuentes
- Las porciones de $S \neq S_\alpha$ se pueden considerar perfectamente rígidas
- En las zonas de liberación de presión $p = 0$

Entonces la integral se reduce a las superficies que rodean a las fuentes

$$\oint_{\text{FUENTES}} (\mathbf{p}_1 \bar{\mathbf{u}}_2 - \mathbf{p}_2 \bar{\mathbf{u}}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \quad (4.46)$$

Estos resultados se aplicarán para desarrollar algunas propiedades generales, cuando las fuentes son pequeñas comparadas con la longitud de onda

4.4 – FUENTES SIMPLES

Revisitemos el **Principio de Reciprocidad Acústica**, donde hay dos fuentes de forma irregular

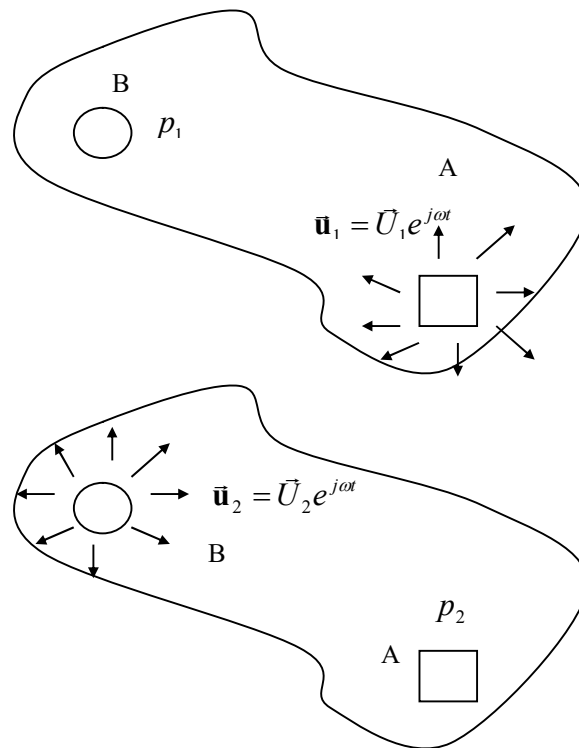


Figura 4.4. Teorema de Reciprocidad Acústica para Fuentes Simples

Aplicando lo anterior

$$\oint_{S_A} \mathbf{p}_2 \bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_A - \oint_{S_B} \mathbf{p}_1 \bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_B = 0 \quad (4.47)$$

Arreglando

$$\oint_{S_A} \mathbf{p}_2 \bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_A = \oint_{S_B} \mathbf{p}_1 \bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_B \quad (4.48)$$

Si las fuentes son pequeñas en comparación con la longitud de onda entonces la presión es aproximadamente constante e uniforme sobre cada receptor – fuente, por ende pueden ser consideradas como constantes en las integrales

$$\mathbf{p}_2 \oint_{S_A} \bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_A = \mathbf{p}_1 \oint_{S_B} \bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_B \quad (4.49)$$

Dividiendo

$$\frac{1}{\mathbf{p}_1} \oint_{S_A} \bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_A = \frac{1}{\mathbf{p}_2} \oint_{S_B} \bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_B \quad (4.50)$$

Podemos suponer que

$$\mathbf{p}(r, t) = P(r) e^{j\omega t} \quad (4.51)$$

Además las integrales corresponden a los poderes complejos de cada fuente

$$\mathbf{Q} = \oint_S \bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (4.52)$$

Reemplazando

$$\frac{\mathbf{Q}_1}{P_1(r) e^{j\omega t}} = \frac{\mathbf{Q}_2}{P_2(r) e^{j\omega t}} \quad (4.53)$$

Simplificando

$$\frac{\mathbf{Q}_1}{P_1(r)} = \frac{\mathbf{Q}_2}{P_2(r)} \quad (4.54)$$

Esta expresión demuestra que la razón de poder de una fuente a la presión sonora en una distancia r es la misma para fuentes simples. ***Esto permite calcular el campo de presión sonora de cualquier fuente simple de forma irregular, ya que debe ser idéntico al de una esfera pulsante que posee el mismo poder de fuente.***

Si las fuentes simples están en campo libre el módulo de $\left| \frac{Q}{P} \right|$ es

$$\left| \frac{Q}{P} \right| = \frac{4\pi a^2 U_0}{\rho_0 c U_0 \frac{a}{r} ka} \quad (4.55)$$

Podemos simplificar U_0 y a^2

$$\left| \frac{Q}{P} \right| = \frac{4\pi}{\rho_0 c_0 \frac{1}{r} k} \quad (4.56)$$

Como el número de onda es

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.57)$$

Entonces

$$\left| \frac{Q}{P} \right| = \frac{4\pi r}{\rho_0 c_0 \frac{2\pi}{\lambda}} \quad (4.58)$$

Simplificamos los términos semejantes y se obtiene el **Factor de Reciprocidad de Campo Libre**

$$\left| \frac{Q}{P} \right| = \frac{2\lambda r}{\rho_0 c_0} \quad (4.59)$$

Utilizaremos lo anteriormente descrito para reorganizar la fórmula de la presión sonora de una esfera pulsante irradiando sonido

$$p(r, t) = j\rho_0 c k a U_0 \frac{a}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad ka \ll 1 \quad (4.60)$$

$$p(r, t) = j\rho_0 c U_0 a^2 \frac{k}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad ka \ll 1 \quad (4.61)$$

El poder de una fuente esférica pulsante es

$$Q = 4\pi a^2 U_0 \quad (4.62)$$

Entonces

$$a^2 U_0 = \frac{Q}{4\pi} \quad (4.63)$$

Reemplazamos

$$p(r, t) = j\rho_0 c \frac{Qk}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \quad ka \ll 1 \quad (4.64)$$

La amplitud de presión sonora es

$$P(r) = \rho_0 c \frac{Qk}{4\pi r} \quad \text{Fuente Simple} \quad ka \ll 1 \quad (4.65)$$

$$P(r) = \frac{1}{2} \rho_0 c \frac{Q}{\lambda r} \quad \text{Fuente Simple} \quad ka \ll 1 \quad (4.66)$$

La intensidad sonora es

$$I = \frac{1}{2} \frac{P^2}{\rho_0 c} \quad (4.67)$$

Entonces

$$I(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0 c} \frac{1}{4} (\rho_0 c)^2 \left(\frac{Q}{\lambda r} \right)^2 \quad (4.68)$$

$$I(r) = \frac{1}{8} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda r} \right)^2 \quad \text{Fuente Simple} \quad ka \ll 1 \quad (4.69)$$

Obtenemos la potencia sonora integrando en una esfera centrada en la fuente de radio r

$$\Pi = \oint_S \vec{I}(r) \cdot \hat{n} \, dS = \oint_S I \, dS = 4\pi r^2 I \quad (4.70)$$

$$\Pi = 4\pi r^2 \frac{1}{8} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda r} \right)^2 \quad (4.70)$$

$$\Pi = \frac{\pi}{2} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda} \right)^2 \quad \text{Fuente Simple} \quad ka \ll 1 \quad (4.72)$$

Otro caso de interés es el de una fuente simple ubicada sobre una frontera plana rígida, también llamada **Pantalla Acústica**.

En este caso, la presión incidente y la presión reflejada tiene la misma fase y la presión sonora emitida al hemiespacio es el doble de la fuente sonora simple

$$p(r, t) = j\rho_0 c \frac{Qk}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \quad \text{Fuente Simple sobre Pantalla Acústica} \quad ka \ll 1 \quad (4.73)$$

$$I(r) = \frac{1}{2} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda r} \right)^2 \quad \text{Fuente Simple sobre Pantalla Acústica } ka \ll 1 \quad (4.74)$$

$$\Pi = \pi \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda} \right) \quad \text{Fuente Simple sobre Pantalla Acústica } ka \ll 1 \quad (4.75)$$

La duplicación de la presión sonora puede parecer paradójica en el caso de la pantalla acústica, ya que la fuente está trabajando contra el doble de la fuerza y en consecuencia debe gastar el doble de la potencia para mantener su propio movimiento

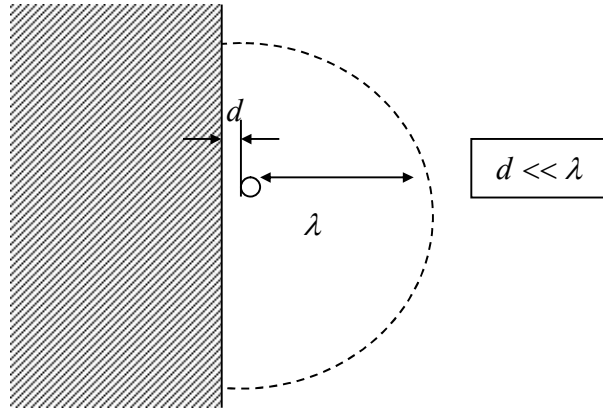


Figura 4.5. Fuente Simple Sobre Pantalla Acústica Infinita

4.5 – RADIACION DIPOLAR

Se puede usar una configuración espacial de fuentes simples, ya sean discretas o distribuidas, cada una con su propio poder de fuente compleja para representar fuentes complicadas. Analizaremos el dipolo acústico compuesto por dos fuentes idénticas que emiten sonido a igual frecuencia pero con un desfase de 180°

$$p_1(r, t) = \frac{A}{r + \Delta r_1} e^{j[\omega t - k(r + \Delta r_1)]} \quad (4.76)$$

$$p_2(r, t) = -\frac{A}{r + \Delta r_2} e^{j[\omega t - k(r - \Delta r_2)]} \quad (4.77)$$

La presión sonora resultante es

$$p(r, \theta, t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)} \left[\frac{e^{-jk\Delta r_1}}{1 + \Delta r_1/r} - \frac{e^{jk\Delta r_2}}{1 - \Delta r_2/r} \right] \quad (4.78)$$

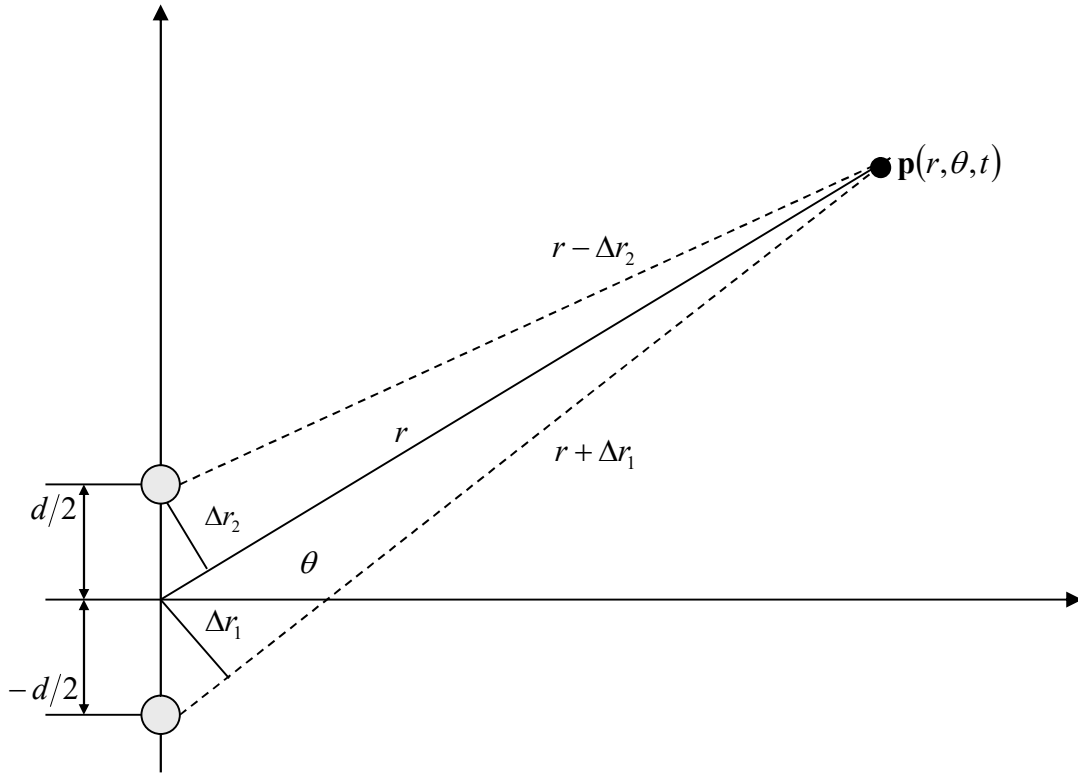


Figura 4.6. Dipolo Acústico

La presión sonora resultante es

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)} \left[\frac{e^{-jk\Delta r_1}}{1 + \Delta r_1 / r} - \frac{e^{jk\Delta r_2}}{1 - \Delta r_2 / r} \right] \quad (4.78)$$

Simplificaciones de campo lejano

$$r \ll d \quad \frac{\Delta r_1}{r} \ll 1 \quad (4.79)$$

$$\Delta r_1 \approx \Delta r_2 \approx \frac{d}{2} \sin \theta \quad \frac{\Delta r_2}{r} \ll 1 \quad (4.80)$$

Reemplazamos

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)} \left[e^{-jk\Delta r_1} - e^{jk\Delta r_2} \right] \quad (4.81)$$

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)} \left[e^{-jk \frac{1}{2} d \sin \theta} - e^{jk \frac{1}{2} d \sin \theta} \right] \quad (4.82)$$

Usando las relaciones exponenciales complejas y trigonométricas

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)} \left[\cos\left(\frac{1}{2} kd \sin \theta\right) - \sin\left(\frac{1}{2} kd \sin \theta\right) - \cos\left(\frac{1}{2} kd \sin \theta\right) - \sin\left(\frac{1}{2} kd \sin \theta\right) \right]$$

Obtenemos la expresión final de la presión sonora

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = \frac{-2A}{r} \sin\left(\frac{1}{2} kd \sin \theta\right) e^{j(\omega t - kr)} \quad (4.83)$$

Para bajas frecuencias

$$kd \ll 1 \quad \sin\left(\frac{1}{2} kd \sin \theta\right) \approx \frac{1}{2} kd \sin \theta \quad (4.84)$$

Reemplazamos

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = -\frac{A}{r} kd \sin \theta e^{j(\omega t - kr)} \quad (4.85)$$

Observamos que el campo acústico es divergente con amplitud

$$p(r, \theta) = \frac{A}{r} kd |\sin \theta| \quad (4.86)$$

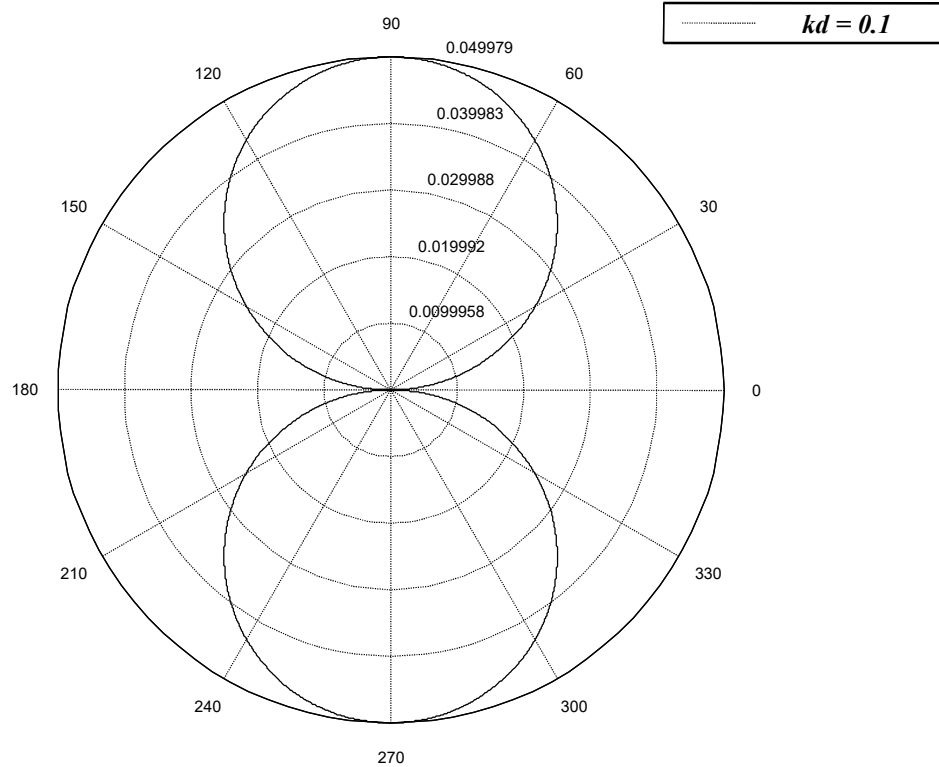


Figura 4.7.a. Factor Direccional Fuente Dipolar - Representación Polar - $kd = 0.1$.

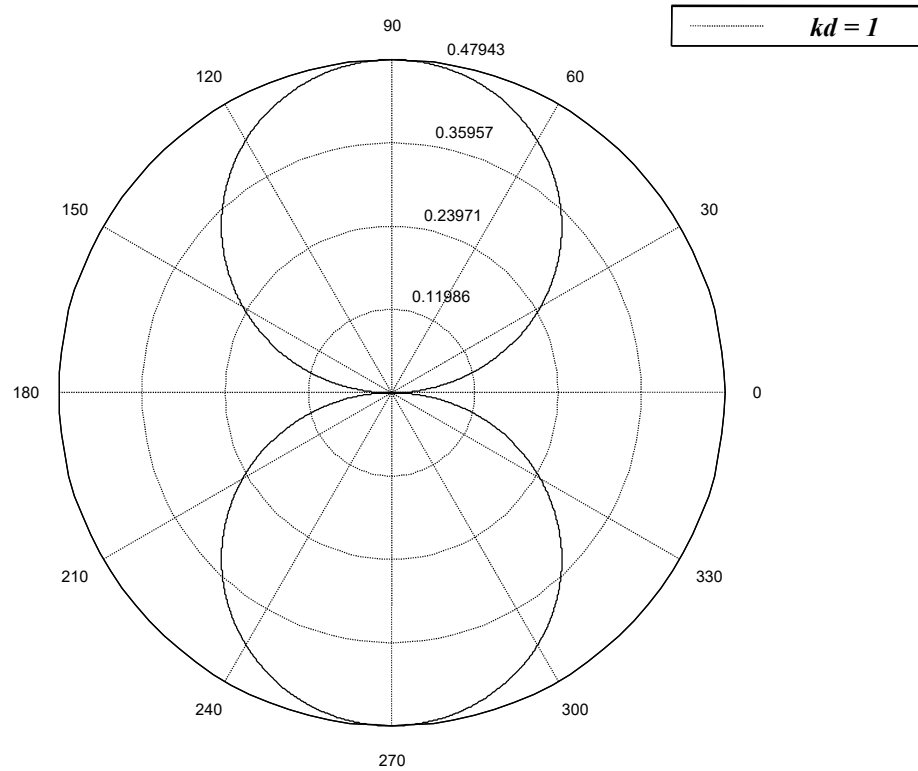


Figura 4.7.b. Factor Direccional Fuente Dipolar - Representación Polar - $kd = 1$.

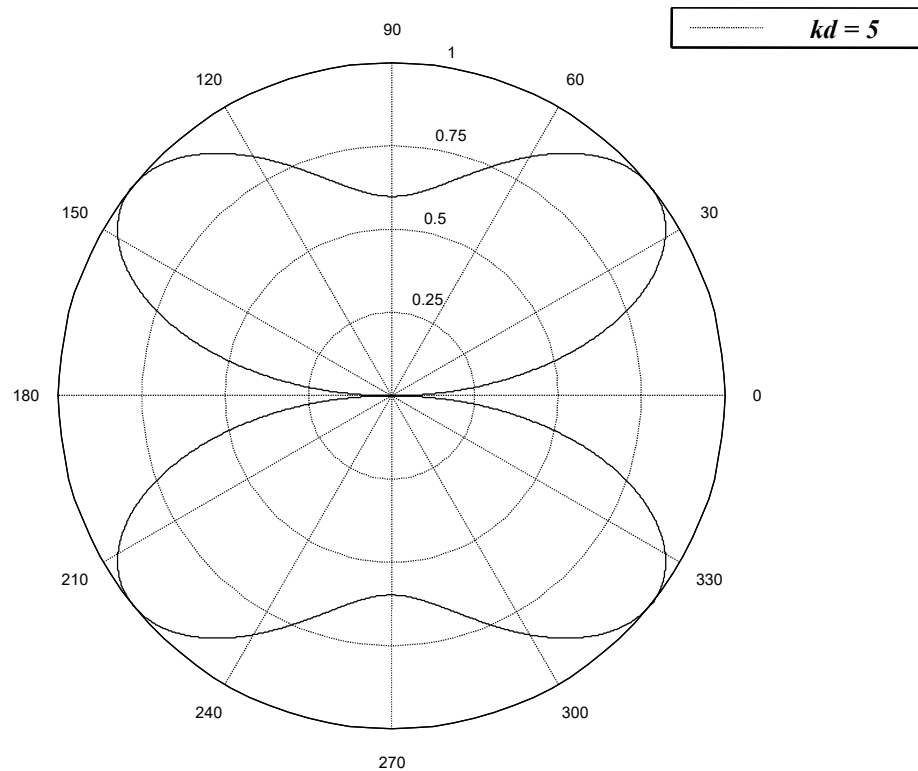


Figura 4.7.c. Factor Direccional Fuente Dipolar - Representación Polar - $kd = 5$.

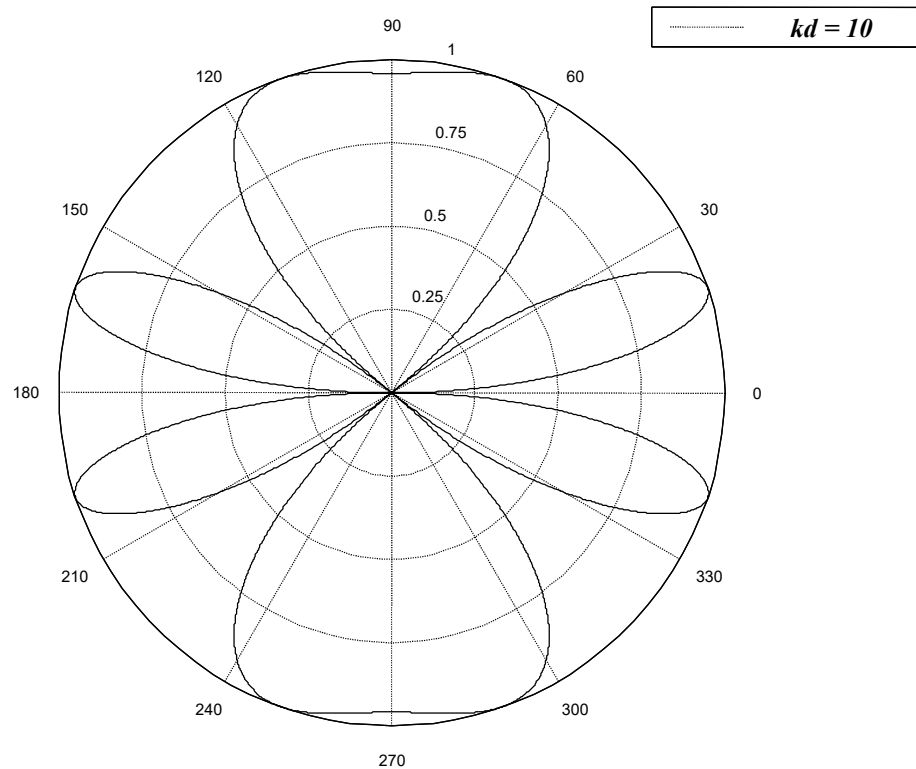


Figura 4.7.d. Factor Direccional Fuente Dipolar- Representación Polar - $kd = 10$.

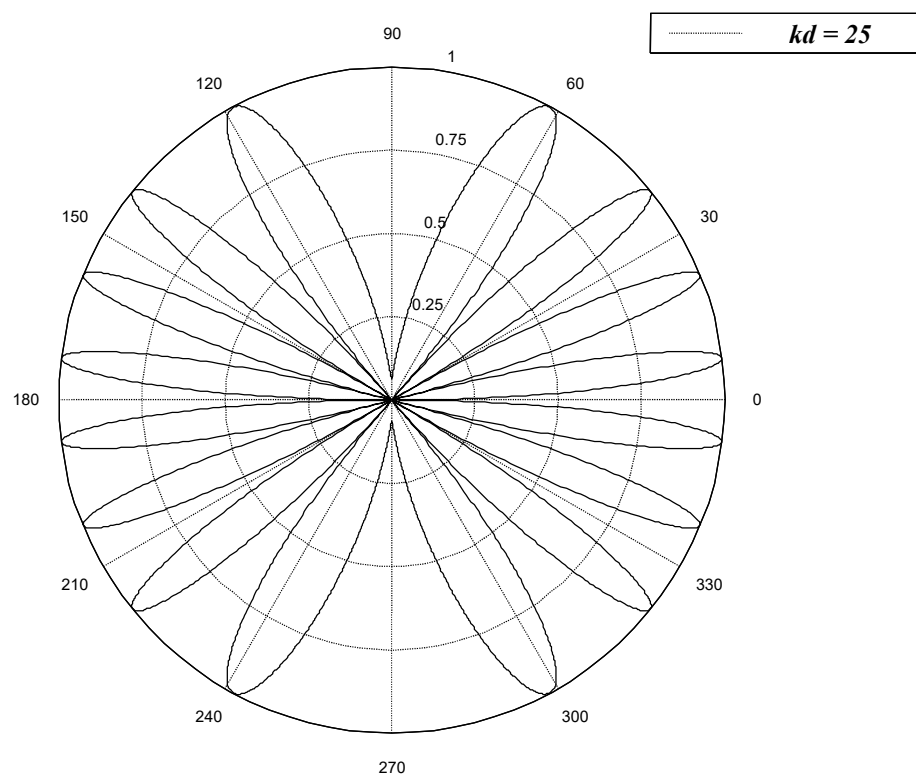


Figura 4.7.e. Factor Direccional Fuente Dipolar - Representación Polar - $kd = 25$.

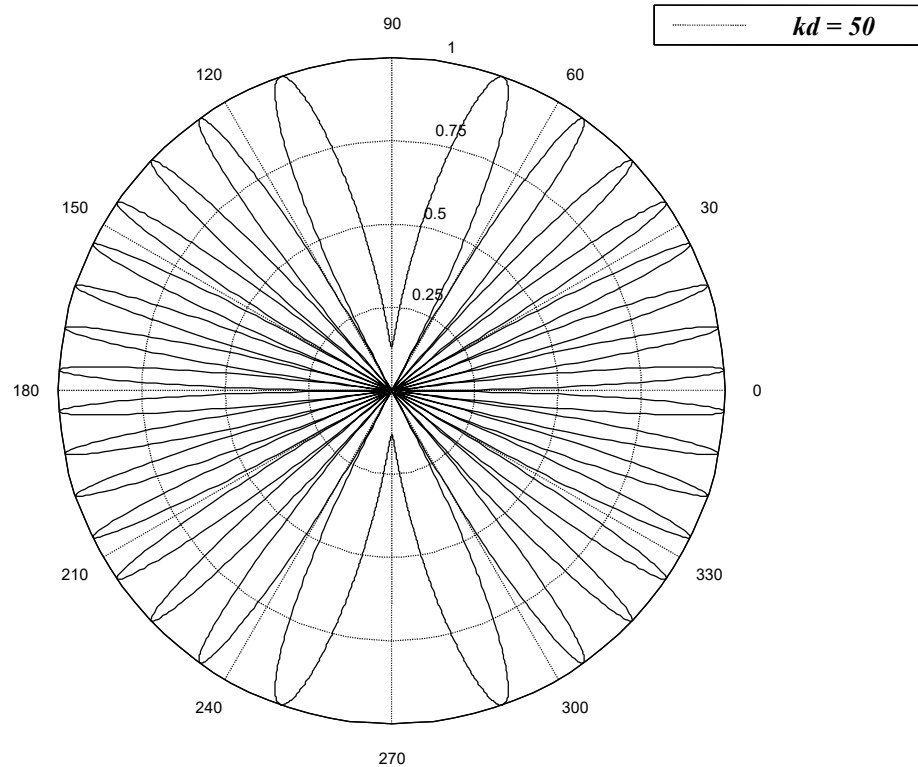


Figura 4.7.f. Factor Direccional Fuente Dipolar - Representación Polar - $kd = 50$.

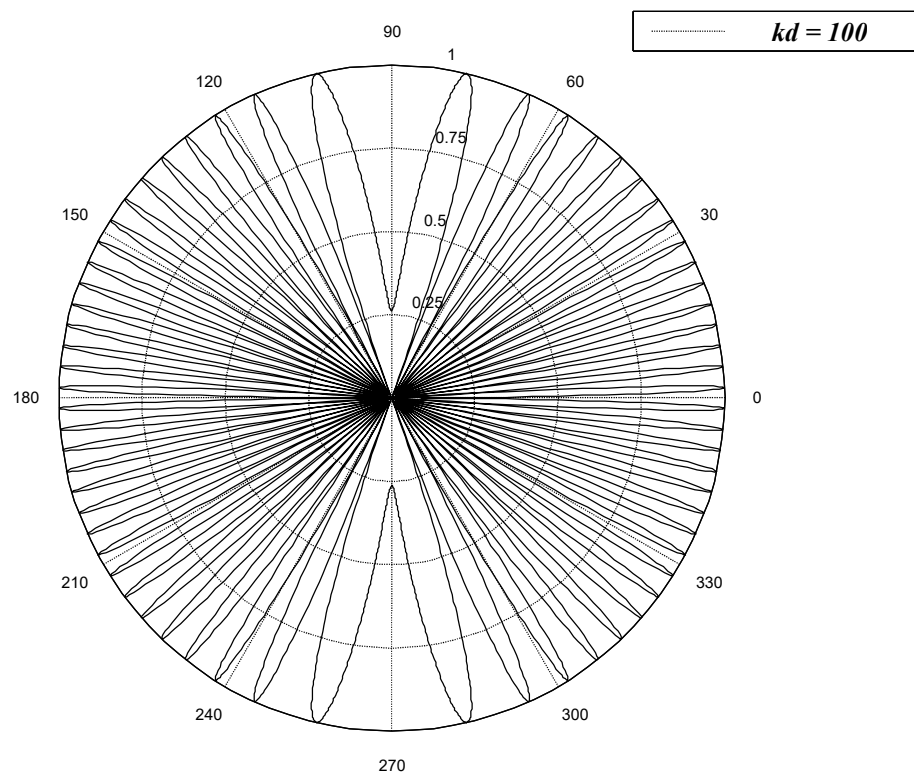


Figura 4.7.g. Factor Direccional Fuente Dipolar - Representación Polar - $kd = 100$.

4.6 – FUENTE LINEAL CONTINUA

Usaremos como ejemplo de una distribución continua de fuentes puntuales simples analizaremos una fuente lineal. Supondremos que esta fuente es un cilindro delgado de radio a y longitud L ($a \ll L$).

En una primera etapa calcularemos el poder de un segmento infinitesimal del cilindro. Como una segunda parte consideraremos este segmento infinitesimal de cilindro como una fuente simple, obteniendo un incremento de presión sonora. Finalmente realizaremos una integración a lo largo del cilindro para tener la presión sonora total

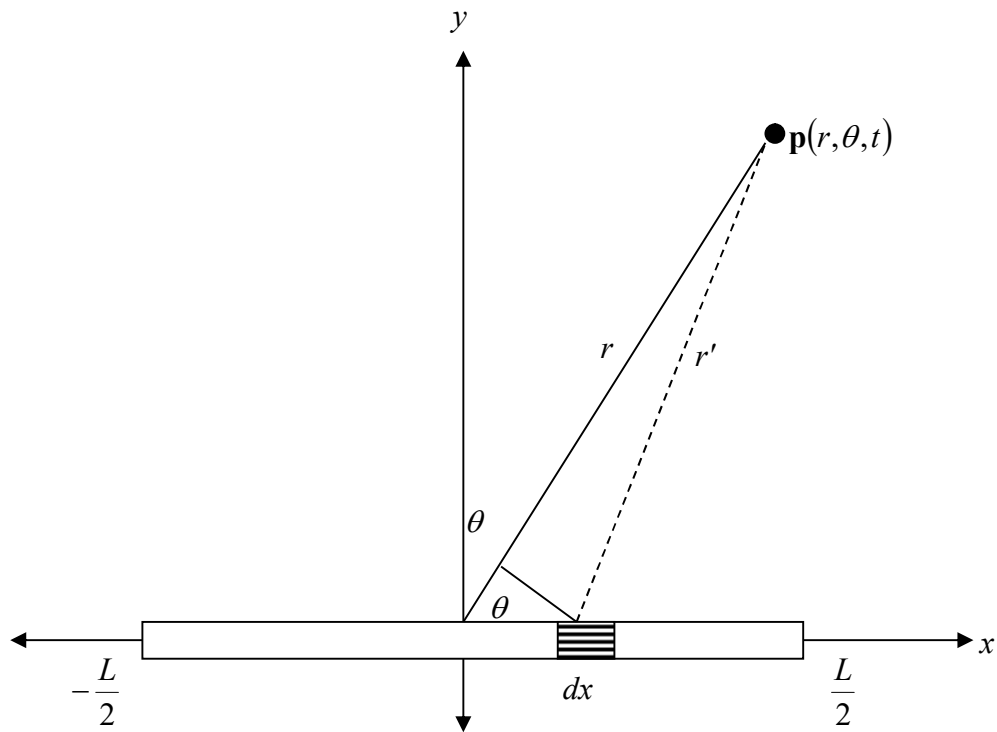


Figura 4.8. Diagrama de la Fuente Lineal Continua.

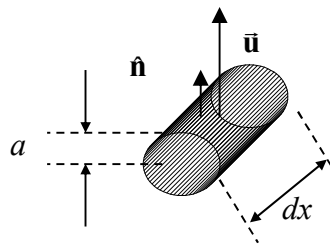


Figura 4.9. Diagrama Vector Normal y Velocidad de Partículas.

El cilindro será considerado como un conjunto de fuentes cilíndricas infinitesimales de longitud dx . Una de estas fuentes tiene un poder de fuente infinitesimal

La velocidad de partículas en la superficie del segmento infinitesimal de cilindro es

$$\vec{u} = \vec{U}_0 e^{j\omega t} \quad (4.87)$$

Como el vector normal $\hat{n}$ es paralelo a la velocidad de partículas, el cálculo del poder de la fuente pasa de la integral a una simple multiplicación

$$dQ = \oint_S \vec{u} \cdot \hat{n} \, dS \quad (4.88)$$

$$dQ = U_0 2\pi a dx \quad (4.89)$$

Al considerar este segmento como fuente simple aplicamos la fórmula correspondiente

$$p(r, t) = j\rho_0 c \frac{Qk}{4\pi r'} e^{j(\omega t - kr')} \quad (4.90)$$

$$dp(r, t) = j\rho_0 c \frac{dQk}{4\pi r'} e^{j(\omega t - kr')} \quad (4.91)$$

$$dp(r, t) = j\rho_0 c \frac{k}{4\pi r'} (U_0 2\pi a dx) e^{j(\omega t - kr')} \quad (4.92)$$

Ahora es conveniente expresar r' en términos de la coordenada r que para campo lejano

$$r \gg L$$

$$r' = r - x \sin \theta \quad r \gg L \quad (4.93)$$

Finalmente sumaremos los efectos de todas las fuentes infinitesimales, esto lo realizaremos a través de la correspondiente integral

$$p(r, \theta, t) = \int dp \quad (4.94)$$

Entonces

$$p(r, \theta, t) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} j\rho_0 c \frac{k}{4\pi r'} (U_0 2\pi a dx) e^{j(\omega t - kr')} \quad (4.95)$$

$$p(r, \theta, t) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} j\rho_0 c U_0 \frac{ka}{2r'} (2\pi a) e^{j(\omega t - kr')} dx \quad (4.96)$$

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = j\rho_0 c U_0 \frac{ka}{2} e^{j\omega t} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{r'} e^{-jkr'} dx \quad (4.97)$$

Reemplazamos $r' = r - x \sin \theta$

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = j\rho_0 c U_0 \frac{ka}{2} e^{j\omega t} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{r - x \sin \theta} e^{-jk(r - x \sin \theta)} dx \quad (4.98)$$

Como el análisis está realizado para campo lejano podemos simplificar el denominador sin variar la amplitud de una manera substancial. Sin embargo la información de la fase es de vital importancia y no debe ser simplificada. Por lo tanto la integral es

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = j\rho_0 c U_0 \frac{ka}{2} e^{j(\omega t - kr)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{r} e^{-jk(r - x \sin \theta)} dx \quad (4.99)$$

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = j\rho_0 c^2 U_0 \frac{ka}{2r} e^{j(\omega t - kr)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{jkx \sin \theta} dx \quad (4.100)$$

Resolvemos la integral

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = j\rho_0 c U_0 \frac{ka}{2r} e^{j(\omega t - kr)} \left. \frac{e^{jkx \sin \theta}}{jk \sin \theta} \right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \quad (4.101)$$

Finalmente obtenemos

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = \frac{1}{2} j\rho_0 c U_0 \frac{a}{r} kL \frac{\sin\left(\frac{1}{2} kl \sin \theta\right)}{\frac{1}{2} kl \sin \theta} e^{j(\omega t - kr)} \quad (4.102)$$

Dentro del patrón de radiación se producen puntos donde el campo de presión es nulo

$$\sin\left(\frac{1}{2} kl \sin \theta\right) = 0 \quad (4.103)$$

Sí y solo si

$$\frac{1}{2} kl \sin \theta = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.104)$$

La amplitud para campo lejano es

$$\mathbf{P}(r, \theta) = P_{ax}(r)H(\theta) \quad (4.105)$$

Donde

$$P_{ax}(r) = \frac{1}{2} \rho_0 c U_0 \frac{a}{r} kL \quad : \quad \textbf{Presión Axial}$$

$$H(\theta) = \left| \frac{\sin(\nu)}{\nu} \right| \quad : \quad \textbf{Factor Direccional}$$

$$b(\theta) = 20 \log H(\theta) \quad : \quad \textbf{Patrón de Emisión}$$

$$P_{ax}(r) = \frac{1}{2} \rho_0 c U_0 \frac{a}{r} kL \quad (4.106)$$

$$H(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2} kl \sin \theta\right)}{\frac{1}{2} kl \sin \theta} \quad (4.107)$$

Nótese que cuando la presión se expresa en términos del poder complejo de la fuente

$$Q = U_0 2\pi a L \quad (4.108)$$

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = \frac{1}{2} j \rho_0 c \frac{Qk}{2\pi r} \frac{\sin(\nu)}{\nu} e^{j(\omega T - kr)} \quad (4.109)$$

Luego

$$\mathbf{P}(r, \theta) = \frac{1}{2} \rho_0 c \frac{Qk}{2\pi r} \cdot H(\theta) \quad (4.110)$$

4.7 FACTOR DIRECCIONAL Y PATRONES DE EMISIÓN

$$\mathbf{p}(r, \theta) = P_{ax}(r)H(\theta, \phi) \quad 3 \text{ dim.}$$

$$\mathbf{p}(r, \theta, \phi) = P_{ax}(r)H(\theta) \quad 2 \text{ dim.}$$

Las direcciones para las cuales $H = 1$ reciben el nombre de eje acústico y plano acústico en dos y tres dimensiones respectivamente.

$$b(\theta, \phi) = 10 \log \frac{I(r, \theta, \phi)}{I_{ax}(r)} = 20 \log H(\theta, \phi) \quad (4.111)$$

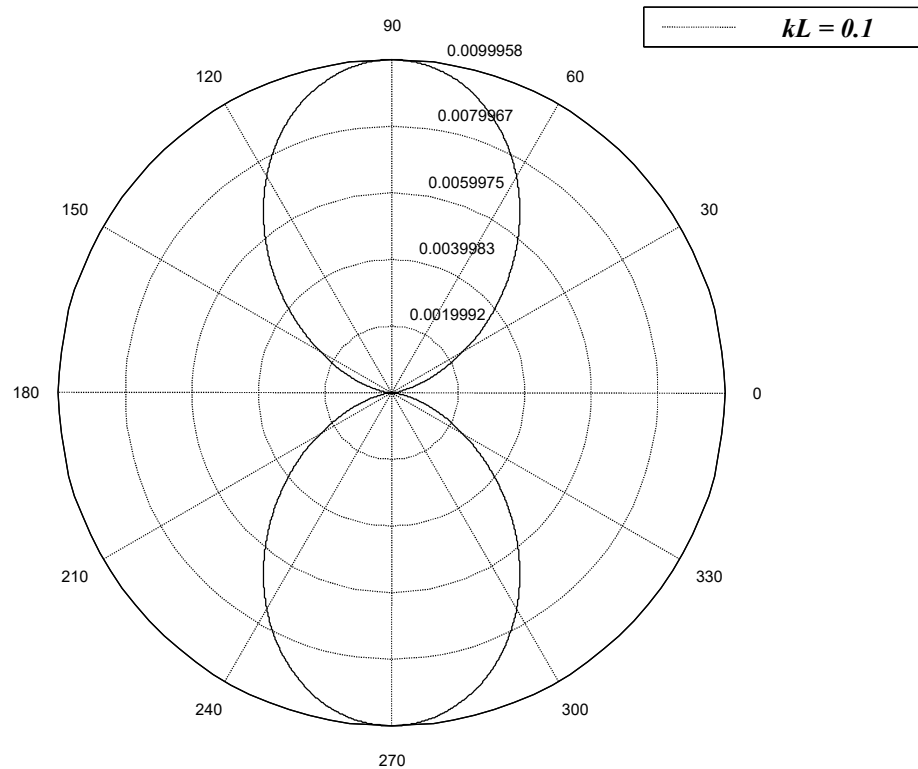


Figura 4.10.a. Factor Direccional Fuente Lineal Simple – Representación Polar – $kL = 0.1$

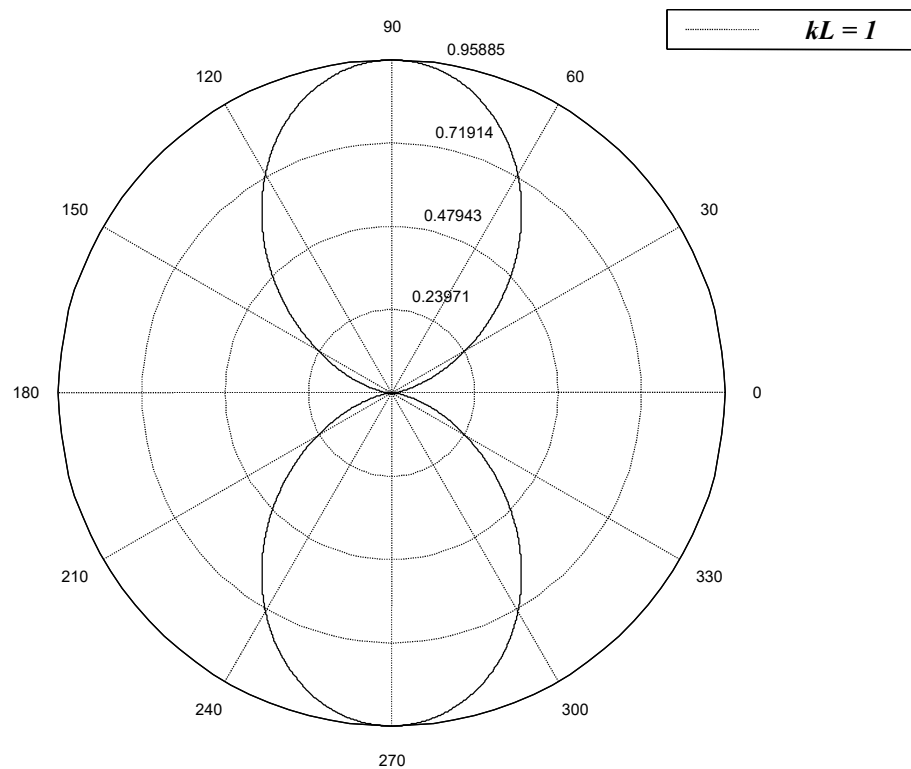


Figura 4.10.b. Factor Direccional Fuente Lineal Simple – Representación Polar – $kL = 1$

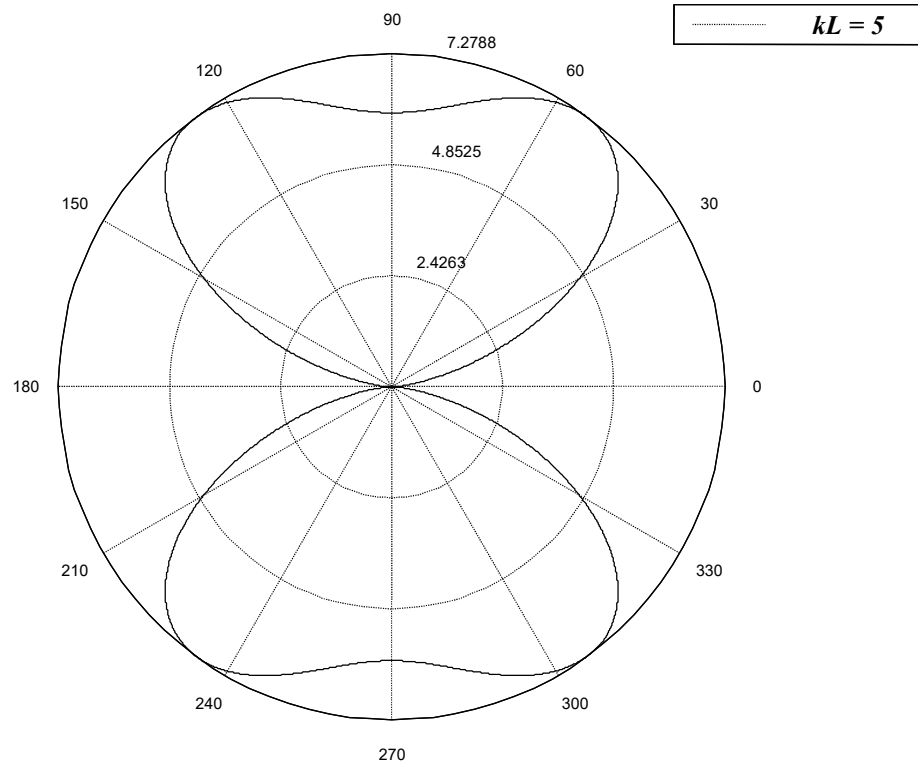


Figura 4.10.c. Factor Direccional Fuente Lineal Simple – Representación Polar – $kL = 5$

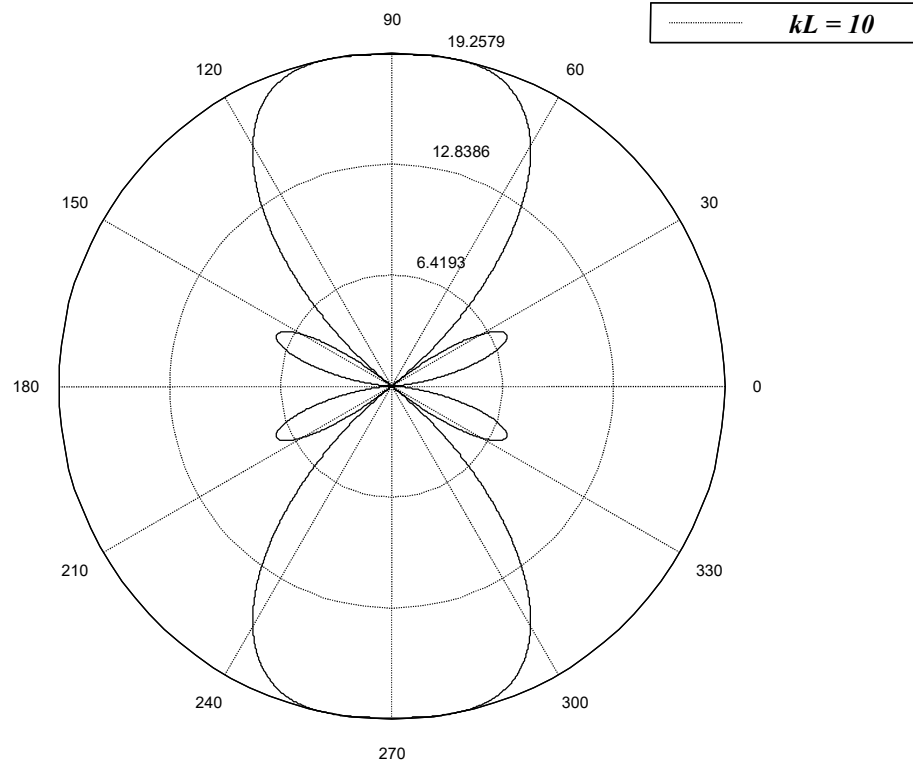


Figura 4.10.d. Factor Direccional Fuente Lineal Simple – Representación Polar – $kL = 10$

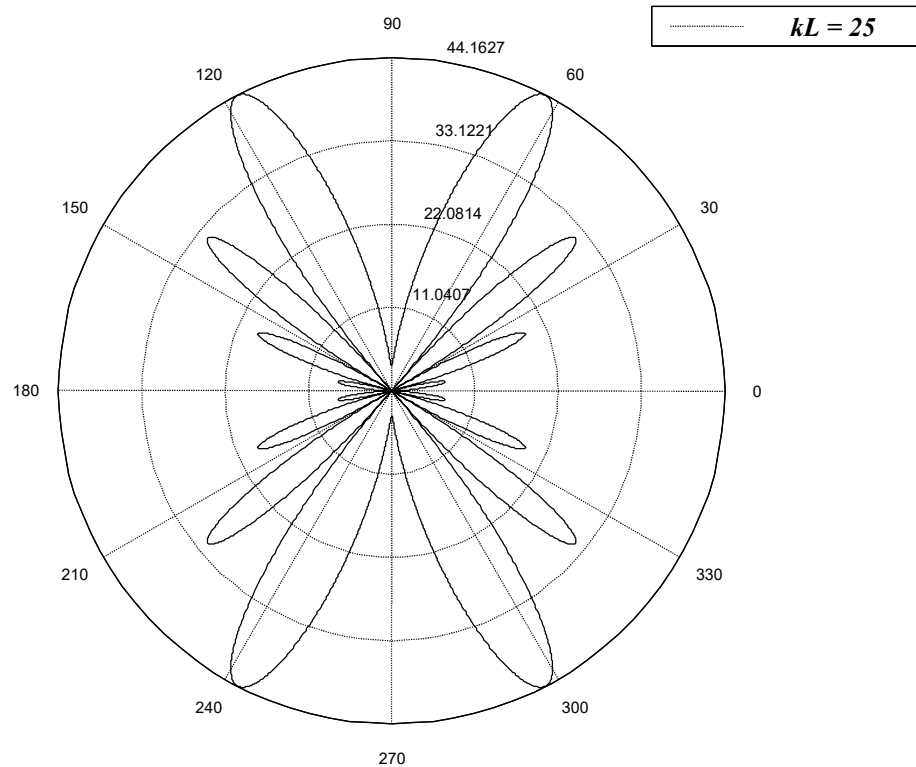


Figura 4.10.e. Factor Direccional Fuente Lineal Simple – Representación Polar – $kL = 25$

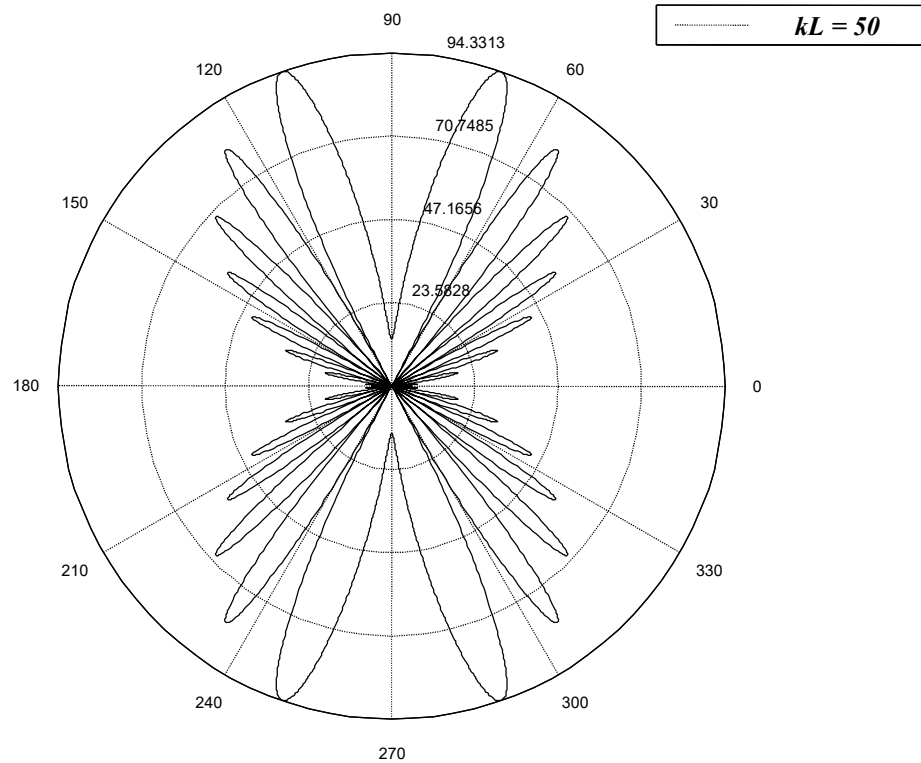


Figura 4.10.f. Factor Direccional Fuente Lineal Simple – Representación Polar – $kL = 50$

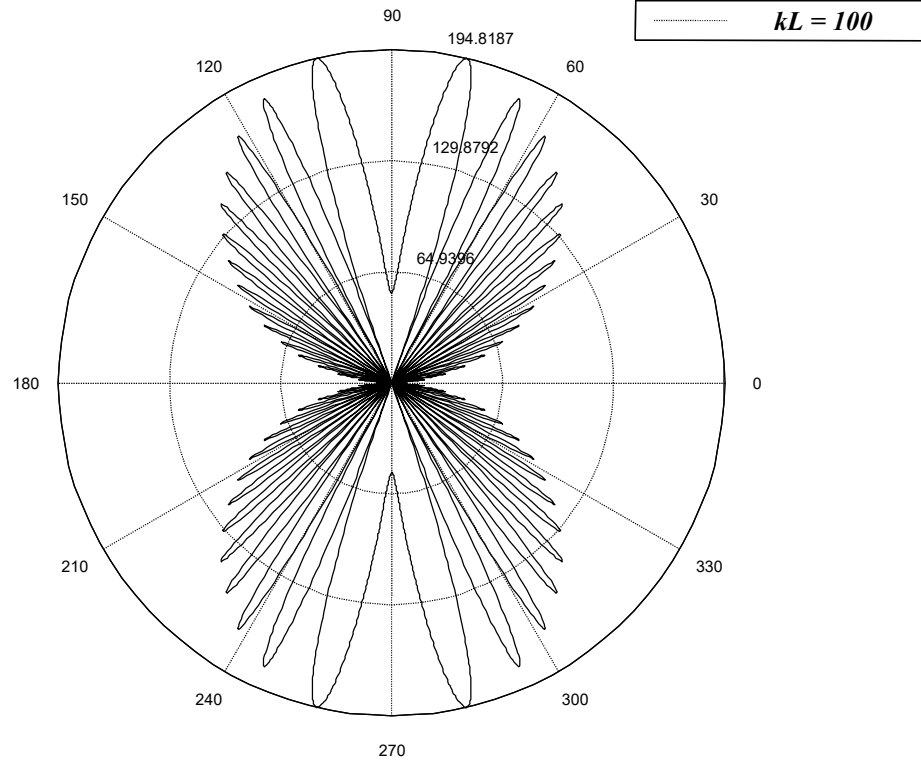


Figura 4.10.g. Factor Direccional Fuente Lineal Simple – Representación Polar – $kL = 100$

4.8 RADIACIÓN POR UN PISTÓN CIRCULAR PLANO

Se tiene un pistón circular plano rígido de radio a que vibra senoidalmente montado sobre una pantalla infinita y rígida.

Si el pistón vibra con velocidad normal a la superficie $\mathbf{u} = U_0 e^{j\omega t}$

El poder complejo del elemento de área es $dQ = U_0 dS$

Para una fuente simple con pantalla

$$d\mathbf{p} = j \frac{\rho_0 c U_0 k}{2\pi r'} e^{j(\omega t - kr')} dS \quad (4.112)$$

$$d\mathbf{p} = j \frac{\rho_0 c Q k}{2\pi r'} e^{j(\omega t - kr')} \quad (4.113)$$

Entonces

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = j \frac{\rho_0 c U_0 k}{2\pi} \int_S \frac{e^{j(\omega t - kr')}}{r'} dS \quad (4.114)$$

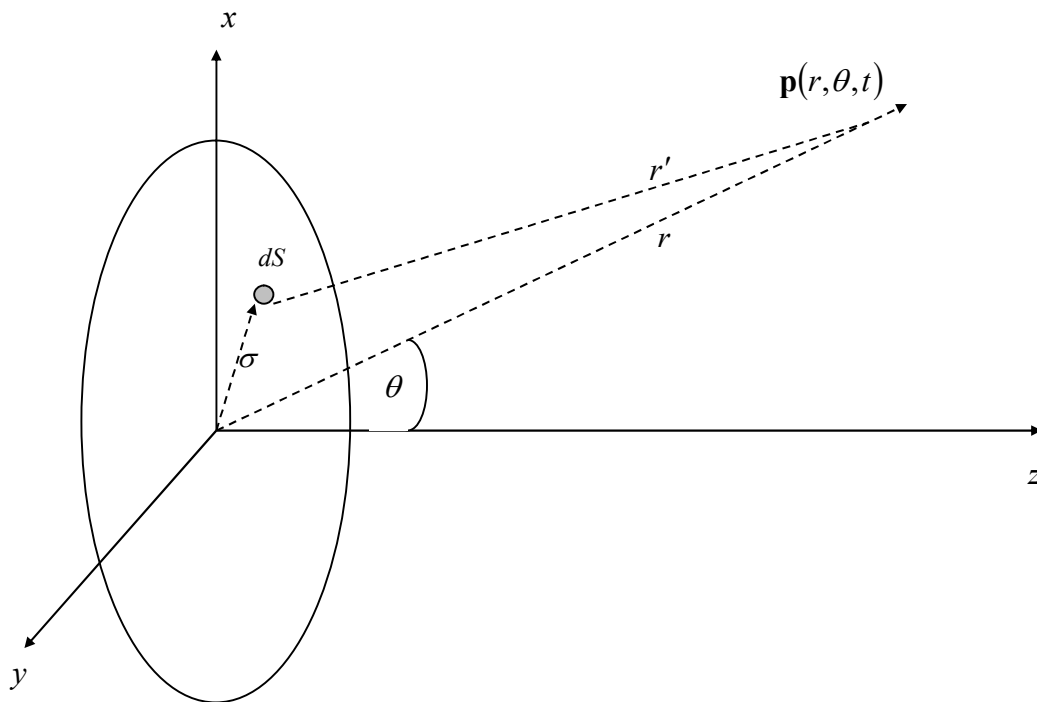


Figura 4.11. Geometría usada para derivar las características de un Pistón Plano

A. Respuesta Axial

Es relativamente fácil calcular el campo sonoro a lo largo del eje acústico o eje z . Observando la figura

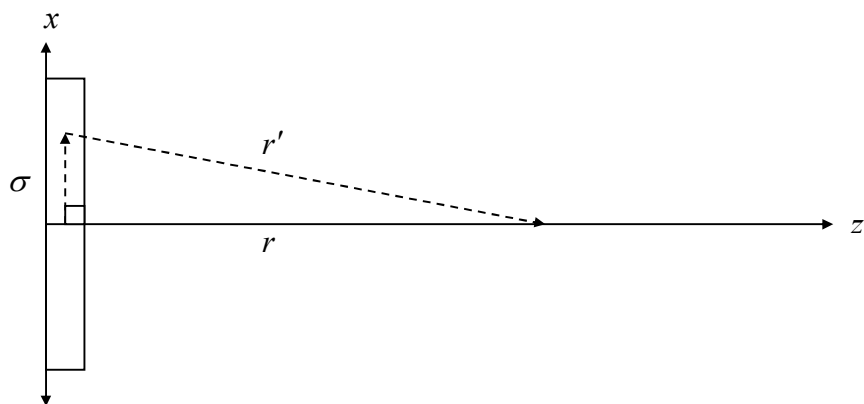


Figura 4.12. Geometría usada para derivar las características de un Pistón Plano

$$r' = \sqrt{r^2 + \sigma^2} \quad (4.115)$$

Remplazando

$$p(r,0,t) = j \frac{\rho_0 c U_0 k}{2\pi} e^{j\omega t} \int_0^a \frac{\exp(-jk\sqrt{r^2 + \sigma^2})}{\sqrt{r^2 + \sigma^2}} 2\pi \sigma d\sigma \quad (4.116)$$

Notar que

$$\frac{\sigma}{\sqrt{r^2 + \sigma^2}} \exp(-jk\sqrt{r^2 + \sigma^2}) = -\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\exp(-jk\sqrt{r^2 + \sigma^2})}{jk} \right) \quad (4.117)$$

Luego

$$p(r,0,t) = \rho_0 c U_0 e^{j\omega t} e^{-jkr} \left(r - \exp(-jk\sqrt{r^2 + a^2}) \right) \quad (4.118)$$

$$p(r,0) = 2\rho_0 c U_0 \left| \sin \left[\frac{1}{2} kr \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2} - 1 \right] \right] \right| \quad (4.119)$$

Si $a \ll r$ o bien

$$\frac{r}{a} \ll 1 \quad (4.120)$$

Entonces se puede aproximar

$$\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2} \cong 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \quad (4.121)$$

Si $\frac{r}{a} \gg ka$ es decir un punto muy lejos, entonces, asintóticamente

$$P_{ax}(r) = \frac{1}{2} \rho_0 c U_0 \frac{a}{r} ka \quad (4.122)$$

Notar que

$$\frac{1}{2} kr \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2} - 1 \right] = m \frac{\pi}{2} \quad \begin{array}{ll} m = 2n - 1 & \Rightarrow P_{max} \\ m = 2n & \Rightarrow P_{min} \end{array} \quad (4.123)$$

Los puntos se dan ambos para $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{r_m}{a} = \frac{1}{m} \cdot \frac{a}{\lambda} - \frac{m}{4} \cdot \frac{\lambda}{a} \quad (4.124)$$

De a partir de r grande hacia la fuente

El primer máximo para $m = 1$ impar

$$\frac{r_1}{a} = \frac{a}{\lambda} - \frac{1}{4} \frac{\lambda}{a} \quad (4.125)$$

El primer mínimo $m = 2$ par

$$\frac{r_2}{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\lambda} - \frac{\lambda}{a} \right) \quad (4.126)$$

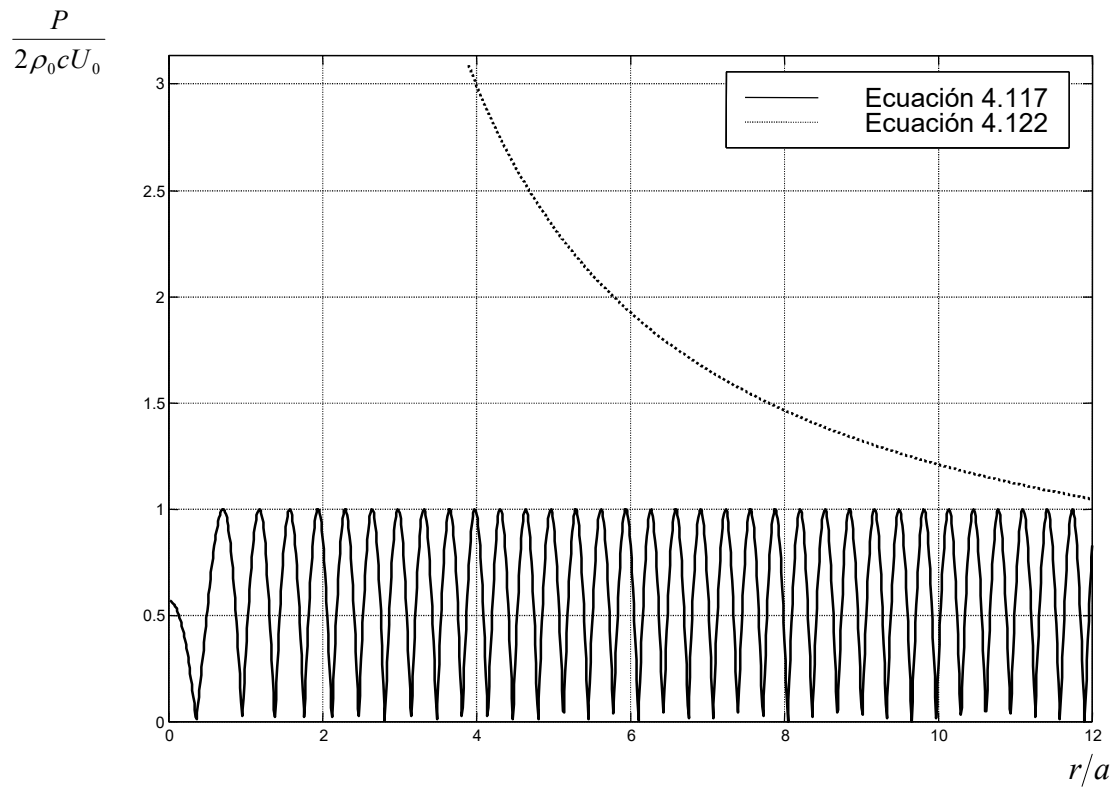


Figura 4.13. Respuesta Axial de un Pistón Circular Plano

Para $r > r_1$ la presión cae proporcionalmente a $\frac{1}{r}$

Campo Lejano

Para $r < r_1$ la presión oscila

Campo Cercano

Notase que si $a = \frac{\lambda}{2} \rightarrow r_1 = 0$ no existe Campo Cercano.

B. Respuesta en Campo Lejano

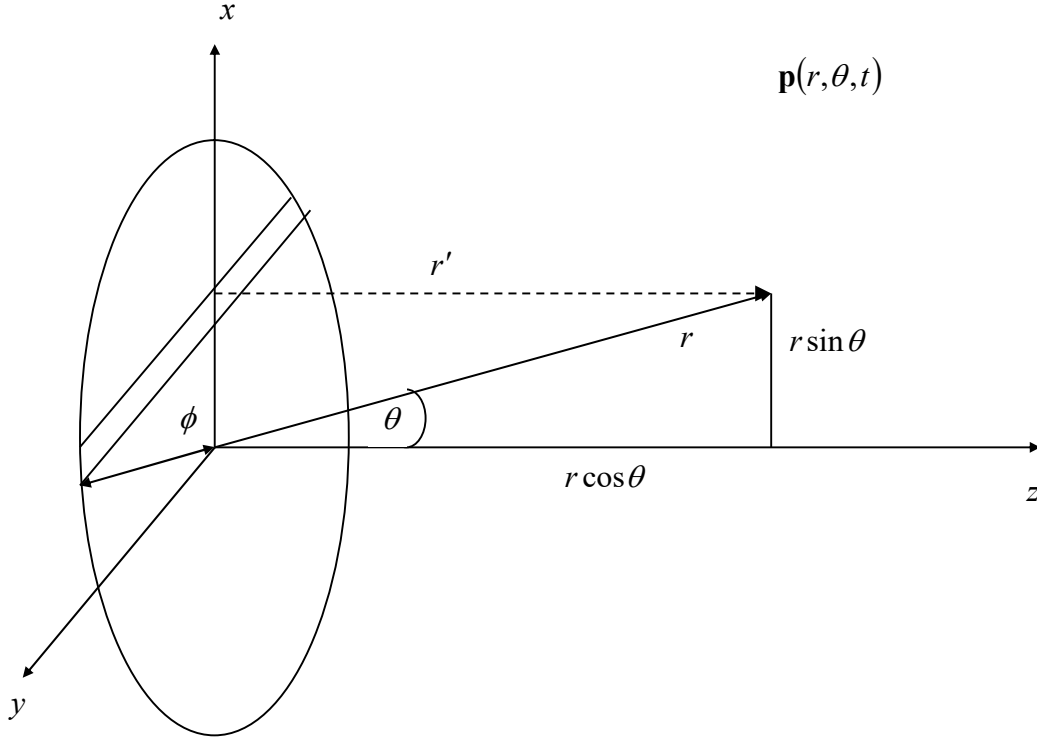


Figura 4.14. Geometría usada para determinar el Campo Lejano

Modelaremos una serie de líneas de longitud $2a \cdot \sin \phi$ y ancho dx .

Poder de la fuente

$$dQ = 2U_0 a \cdot \sin(\phi) dx \quad (4.127)$$

La presión para una fuente simple en pantalla infinita

$$p = j\rho_0 c \frac{Qk}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (4.128)$$

Entonces, para la línea infinitesimal

$$dp = j\rho_0 c \frac{dQk}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (4.129)$$

$$dp = j\rho_0 c \frac{2U_0 a \sin \phi dx}{2\pi r'} e^{j(\omega t - kr')} \quad (4.130)$$

$$dp = j\rho_0 c \frac{U_0}{\pi r'} ka \cdot \sin \phi e^{j(\omega t - kr')} dx \quad (4.131)$$

Para $r \gg a$

$$r' \approx r \left(1 - \frac{a}{r} \sin \theta \cdot \cos \phi \right) = r + \Delta r = r - a \sin \theta \cos \phi \quad (4.132)$$

La presión

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = j\rho_0 c \frac{U_0}{\pi r} ka \cdot e^{j(\omega t - kr)} \int_{-a}^a e^{jka \sin \theta \cos \phi} \sin \phi \cdot dx \quad dS \text{ línea} \quad (4.133)$$

$r' \rightarrow r$ denominador
 $r \rightarrow r + \Delta r$ en la fase

Usando

$$x = a \cos \phi \\ dx = -a \sin \phi \cdot d\phi \quad (4.134)$$

Entonces

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = j\rho_0 c \frac{U_0}{\pi} \frac{a}{r} ka \cdot e^{j(\omega t - kr)} \int_0^\pi e^{jka \sin \theta \cos \phi} \sin^2 \phi d\phi \quad (4.135)$$

La integral

$$\int_0^\pi e^{jka \sin \theta \cos \phi} \sin^2 \phi \, d\phi = \int_0^\pi \cos(ka \sin \theta \cdot \cos \phi) \sin^2 \phi \, d\phi + j \int_0^\pi \sin(ka \sin \theta \cdot \cos \phi) \sin^2 \phi \, d\phi$$

La segunda integral se hace cero. Integral del tipo

$$\int_0^\pi \cos(z \cos \phi) \sin^2 \phi \, d\phi = \pi \frac{J_1(z)}{z} \quad (4.136)$$

Entonces

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = j\rho_0 c \frac{U_0}{\pi} \frac{a}{r} ka e^{j(\omega t - kr)} \int_0^\pi \cos(ka \sin \theta \cos \phi) \sin^2 \phi \, d\phi \quad (4.137)$$

$$\mathbf{p}(r, \theta, t) = j \frac{\rho_0 c}{2} U_0 \frac{a}{r} k a e^{j(\omega t - kr)} \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right] \quad (4.138)$$

$$H(\theta) = \frac{2J_1(\nu)}{\nu} \quad \nu = ka \sin \theta \quad (4.139)$$

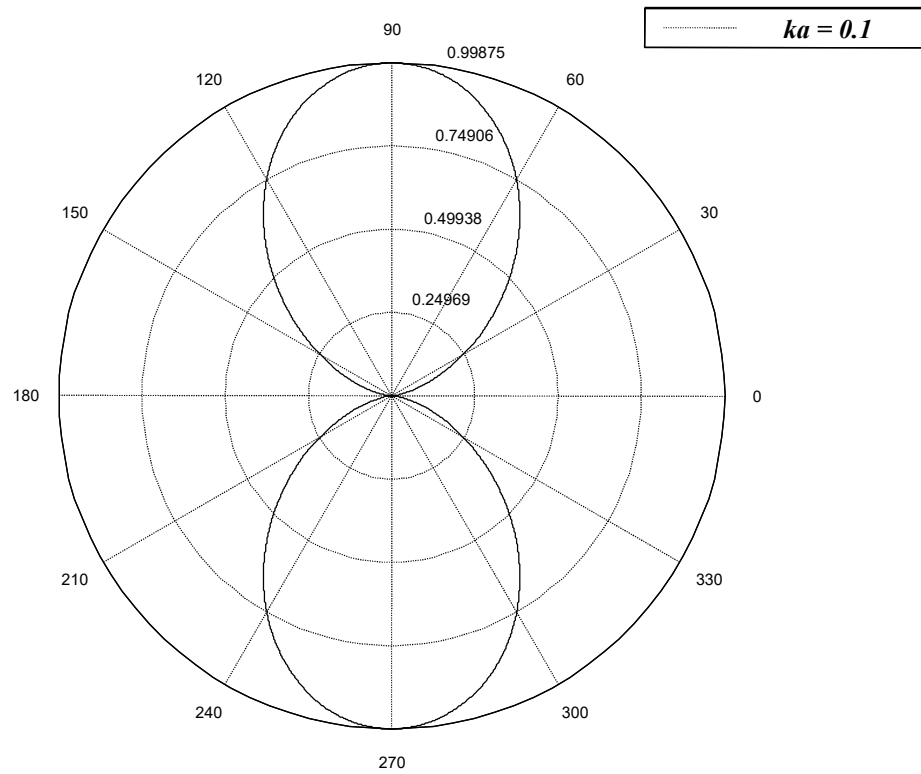


Figura 4.15.a. Factor Direccional Pistón Plano – Representación Polar – $ka = 0.1$

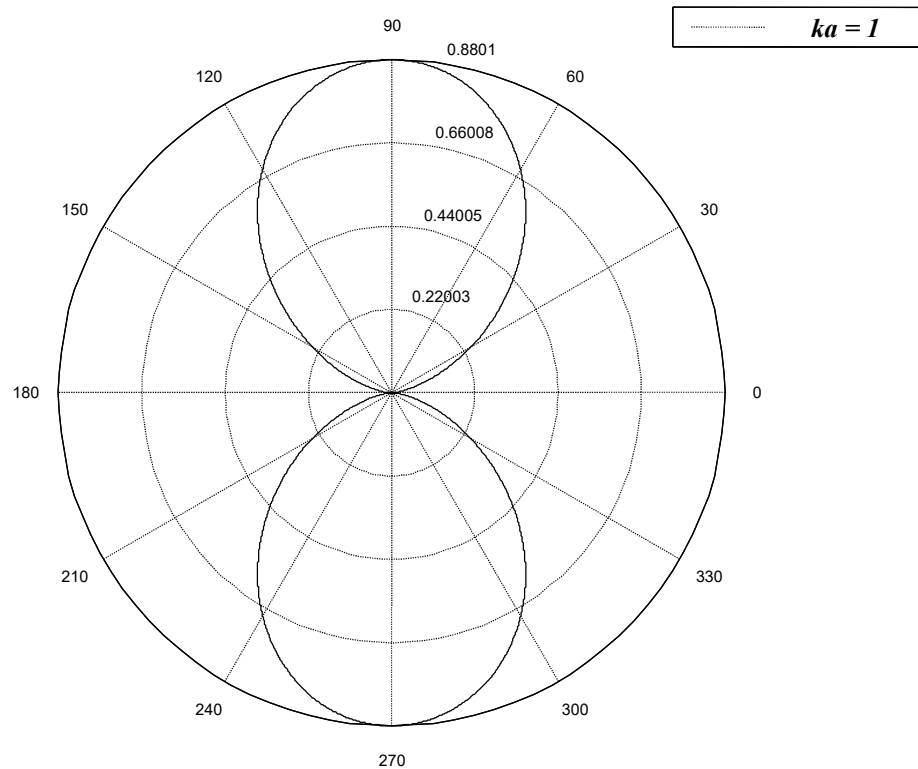


Figura 4.15.b. Factor Direccional Pistón Plano – Representación Polar – $ka = 1$

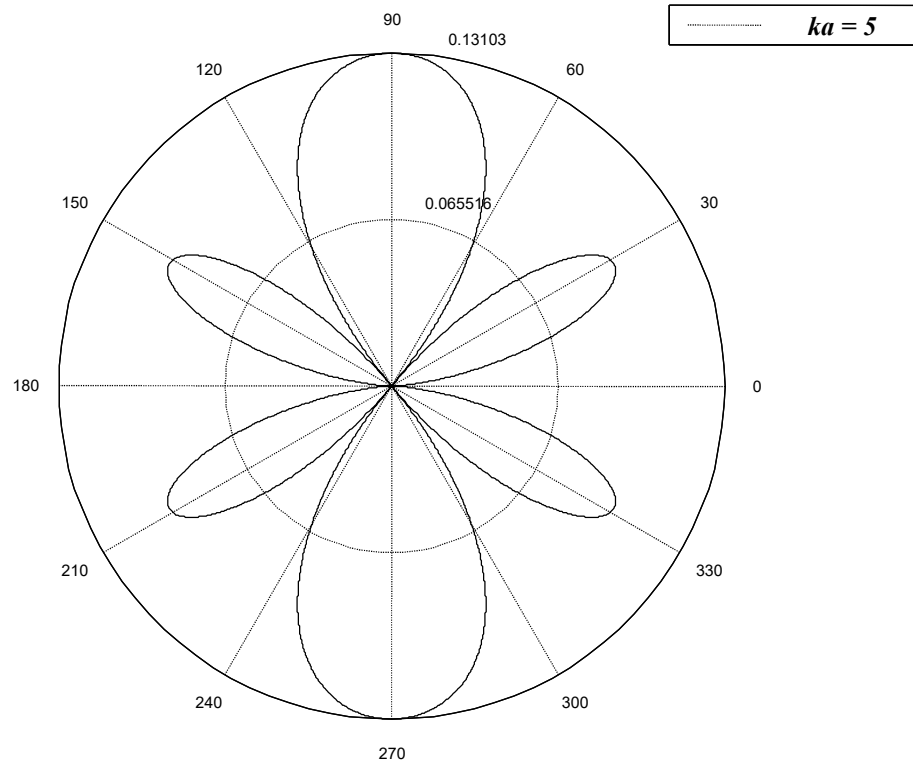


Figura 4.15.c. Factor Direccional Pistón Plano – Representación Polar – $ka = 5$

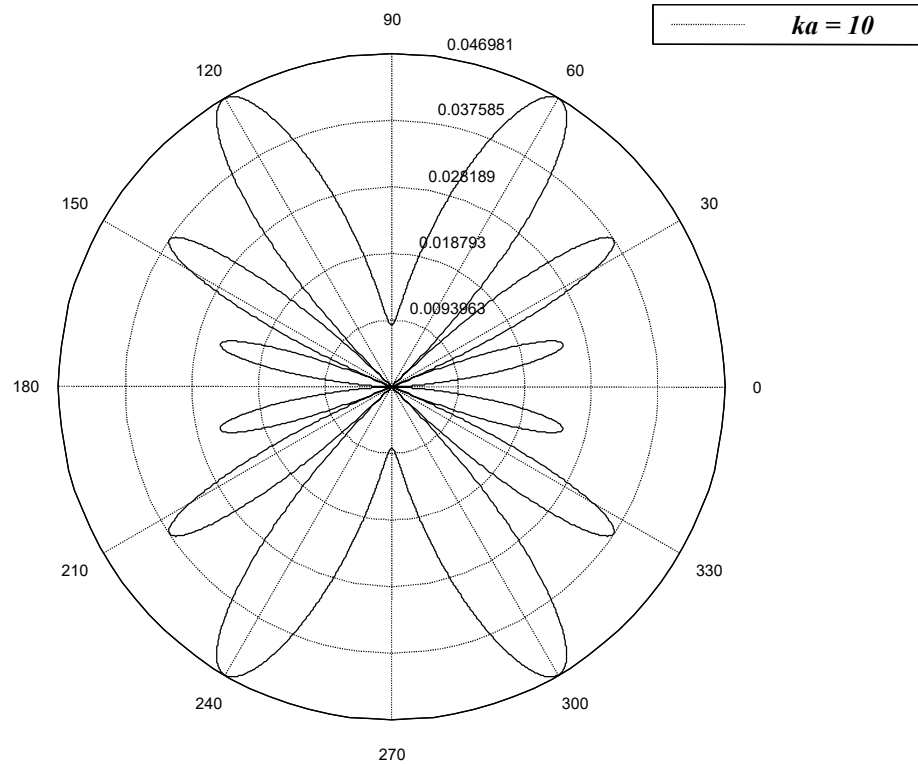


Figura 4.15.d. Factor Direccional Pistón Plano – Representación Polar – $ka = 10$

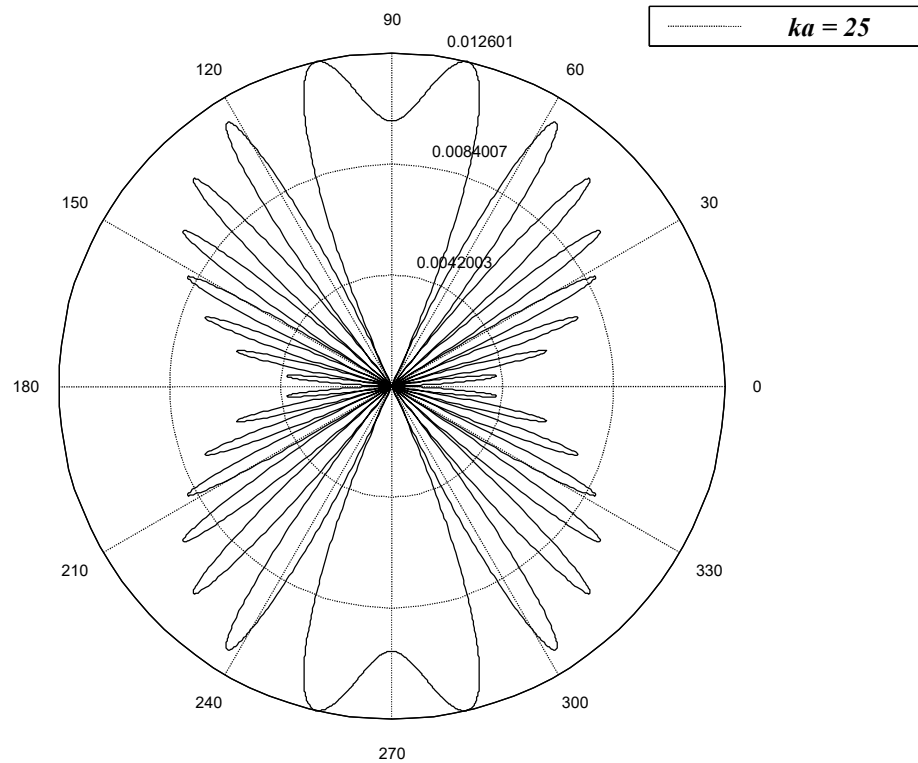


Figura 4.15.e. Factor Direccional Pistón Plano – Representación Polar – $ka = 25$

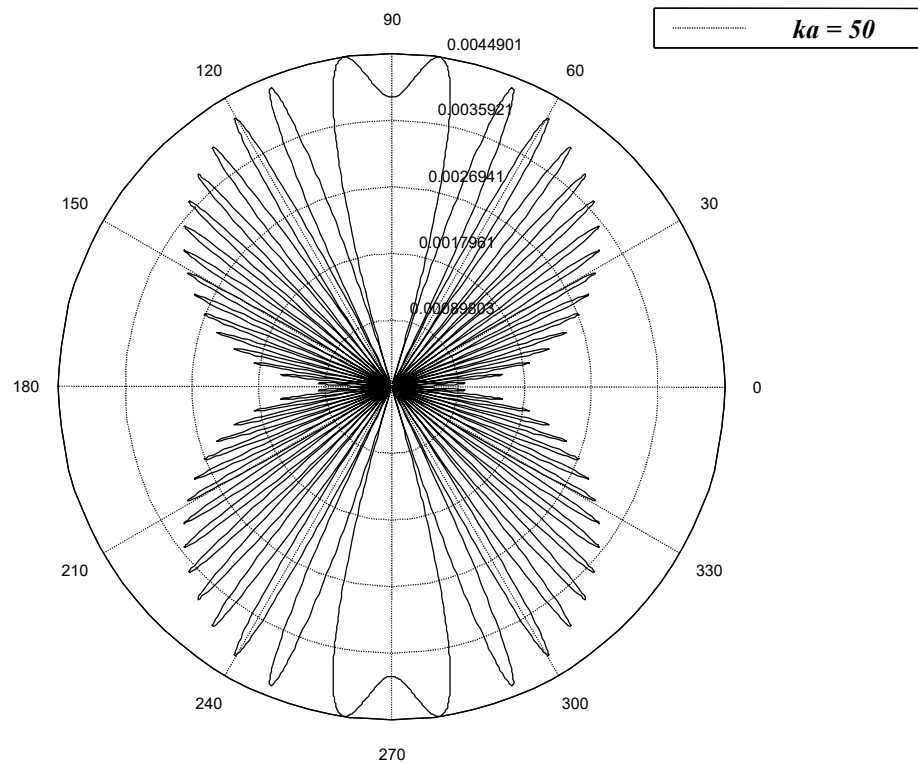


Figura 4.15.f. Factor Direccional Pistón Plano – Representación Polar – $ka = 50$

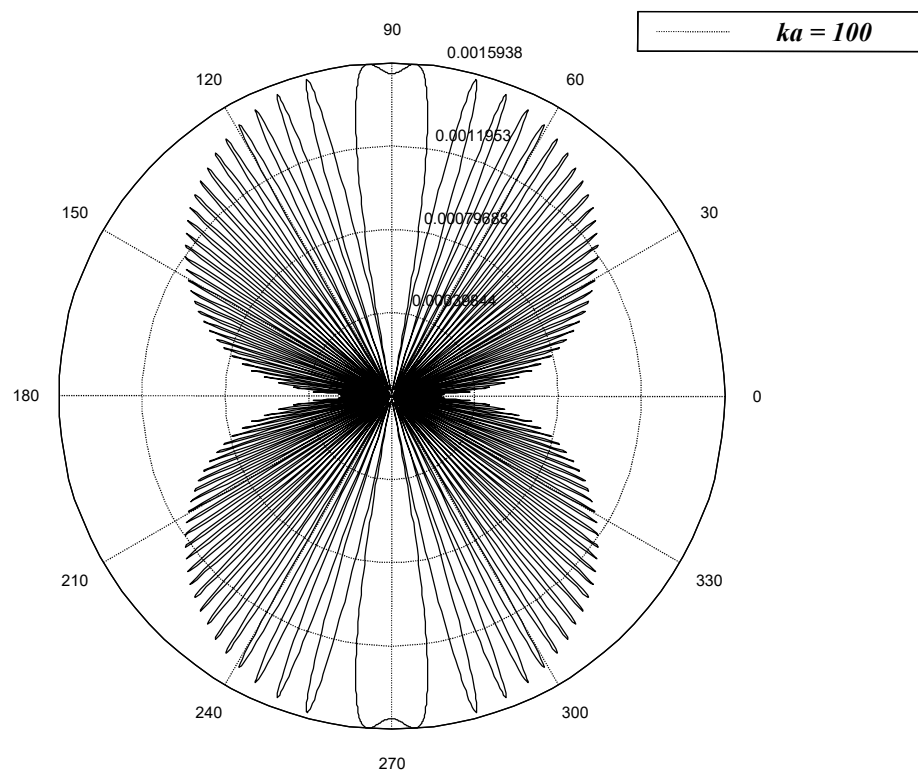


Figura 4.15.g. Factor Direccional Pistón Plano – Representación Polar – $ka = 100$

Observaciones:

$P_{ax}(r)$ es igual al caso de análisis en el eje.

$J_1(x)$ tiene ceros en j_{1m}

$ka \gg 1$ existen muchos lóbulos laterales

$ka \ll 1$ existe sólo un lóbulo central

No modela exactamente un altavoz.

Pantalla en el caso real no es infinita es una caja.

El parlante por sí solo se comporta como un dipolo la radiación es por adelante y atrás.

El cono no es rígido, sobre todo en altas frecuencias.

4.9 AMPLITUD DE EMISIÓN, NIVEL DE FUENTE, DIRECTIVIDAD E ÍNDICE DE DIRECTIVIDAD.**Amplitud de Emisión**

No existe un valor nominal $\frac{I(\theta, \phi)}{I_{ax}} \rightarrow \theta, \phi$ efectivo de la extremidad del lóbulo

$$\frac{I(\theta, \phi)}{I_{ax}} = 0.5 \quad (-3dB) \qquad 0.25 \quad (-6dB) \qquad 0.1 \quad (-10dB)$$

Los criterios son ambiguos. Los patrones de emisión varían con la frecuencia f o bien ka .

Nivel de fuente

El nivel de presión sonora se relaciona con la potencia de la fuente

Medir presión en campo lejano en el eje acústico y extrapolar a un metro.

$$P_{ax}(r) = \frac{1}{r} \tag{4.140}$$

$$P_{ax}(1) = \lim_{r \rightarrow 1} P_{ax}(r) \tag{4.141}$$

Definimos $P_e(1)$

$$P_e(1) = \frac{P_{ax}(1)}{\sqrt{2}} \tag{4.142}$$

Nivel de fuente

$$NF(presion) = 20 \log \frac{P_e(1)}{P_{REF}} \tag{4.143}$$

$$P_{REF} = 2 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$$

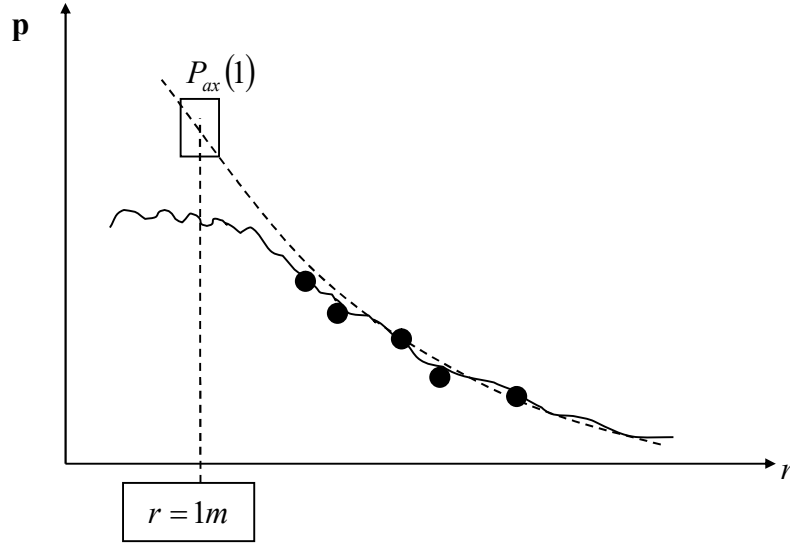


Figura 4.16. Nivel de Fuente

Directividad

Para un campo de presión $P(r, \theta, \phi)$ la intensidad en campo lejano

$$I(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2\rho_0 c} P^2(r, \theta, \phi) \quad (4.144)$$

La potencia se obtiene integrando sobre una superficie esférica que encierra la fuente

$$W = \frac{1}{2\rho_0 c} \int_{4\pi} P^2(r, \theta, \phi) r^2 d\Omega \quad \Omega \text{ ángulo sólido}$$

$$W = \frac{1}{2\rho_0 c} r^2 P_{AX}^2(r) \int_{4\pi} H^2(\theta, \phi) d\Omega \leftrightarrow P_{AX}^2 = \frac{\pi \cdot 2\rho_0 c}{r^2} \int H d\Omega \quad (4.145)$$

Para una fuente acústica simple que genera la misma potencia, fuente omnidireccional
 $H(\theta, \phi) = 1$

$$W = \frac{1}{2\rho_0 c} 4\pi r^2 P_s^2(r) \leftrightarrow P_s^2 = \frac{\pi \cdot 2\rho_0 c}{4\pi r^2} \quad (4.146)$$

la directividad es

$$D = \frac{I_{ax}(r)(direcc)}{I_s(r)(omni_esférico)} = \frac{P_{ax}^2(r)}{P_s(r)} \quad (4.147)$$

Si se sustituye en las potencias

$$D = \frac{4\pi}{\int_{4\pi} H^2(\theta, \phi) d\Omega} \quad (4.148)$$

Combinamos

$$P_e^2(1) = \frac{1}{2} P_{AX}(1) \quad (4.149)$$

$$\int_{4\pi} H^2(\theta, \phi) d\Omega = \frac{4\pi}{D} \quad (4.150)$$

$$W = \frac{4\pi}{D} (1)^2 \frac{P_e^2(1)}{\rho_0 c} \quad r = 1 \quad (4.151)$$

Sustituyendo en el Nivel de Fuente

$$P_e^2(1) = \frac{WD\rho_0 c}{4\pi} \quad (4.152)$$

$$NF(P_{REF}) = 10 \log \frac{D\rho_0 c \Pi}{4\pi P_{REF}^2} \quad (4.153)$$

Índice de Directividad

$$ID = 10 \log D$$

$$\text{Para una esfera pulsante} \quad H(\theta, \phi) = 1 \quad \text{pantalla } H(\theta, \phi) = \begin{cases} 1 \rightarrow \Omega \leq 2\pi \\ 0 \rightarrow \Omega > 2\pi \end{cases}$$

$$D = 1 \Rightarrow ID = 0dB$$

$$D = 2 \Rightarrow ID = 3dB$$

$$\text{Si } P_{ref} = 1\mu bar = 0.1Pa = 0.1N/m^2$$

$$NF(1\mu bar) = 10 \log p + ID + 10 \log \left(\frac{25}{\pi} \rho_0 c \right) \quad (4.154)$$

O bien

$$NF(1\mu bar) = 10 \log p + ID + 71$$

$$NF(1\mu Pa) = 10 \log p + ID + 171$$

Agua

$$NF(1\mu bar) = 10 \log p + ID + 109$$

Aire

Para una fuente lineal cilíndrica

$$D = \frac{4\pi}{2 \int_0^{\pi/2} H^2(\theta) 2\pi \cos \theta d\theta} \quad (4.155)$$

$$\text{Sea } \nu = \frac{1}{2} kL \sin \theta \quad (4.156)$$

Entonces las variables de integración varían de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \theta &\Rightarrow 0 \rightarrow \pi/2 \\ \sin \theta &\Rightarrow 0 \rightarrow 1 \\ \nu &\Rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{2} kL \end{aligned}$$

$$d\nu = \frac{1}{2} kL \cdot \cos \theta d\theta \quad (4.157)$$

$$D = \frac{\frac{1}{2} kL}{\int_0^{\frac{kL}{2}} \left(\frac{\sin \nu}{\nu} \right)^2 d\nu} \quad (4.158)$$

Si la fuente es grande, tal que $kL \gg 1$, entonces aproximamos

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \nu}{\nu} \right)^2 d\nu = \frac{\pi}{2} \quad (4.159)$$

$$D \cong \frac{\frac{1}{2} kL}{\frac{\pi}{2}} \approx \frac{kL}{\pi} \approx \frac{2L}{\lambda} \quad kL \gg 1 \quad (4.160)$$

Para un pistón simple

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{\pi/2} \left(\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 2\pi \sin \theta d\theta} \quad (4.161)$$

$$D = \frac{(ka)^2}{1 - \left(\frac{J_1(ka)}{ka} \right)} \rightarrow 0 \quad (4.162)$$

Para bajas frecuencias $ka \ll 1 \Rightarrow D \approx 2$

Para altas frecuencias $ka \gg 1 \Rightarrow D \approx (ka)^2$ (altamente direccional)

4.10 FACTORES DIRECCIONALES DE TRANSDUCTORES REVERSIBLES

Un transductor reversible se comporta como un Emisor Receptor, como ejemplo puede tomarse un Altavoz electrodinámico usado como intercomunicador (edificios). Deben tener igual direccionalidad emisor – receptor

$\langle \mathbf{p}_B \rangle$: Promedio de la presión sonora incidente sobre el receptor.

El factor direccional de recepción

$$H_R(\theta, \phi) = \left| \frac{\langle \mathbf{p}_B(\theta, \phi) \rangle_S}{\langle \mathbf{p}_{B_{\max}} \rangle_S} \right| \quad (4.163)$$

Sean dos transductores reversibles con superficies distintas situados a gran distancia r uno del otro (para eliminar campo cercano.)

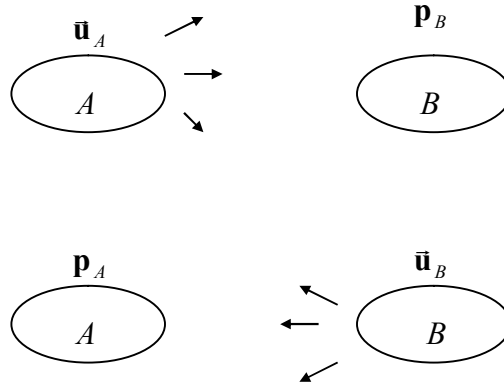


Figura 4.17. Transductores Reversibles

Por el teorema de reciprocidad

$$\int_{A2} p_{B2} \bar{u}_2 \cdot \hat{n} dS = \int_{A1} p_{B1} \bar{u}_1 \cdot \hat{n} dS \quad (4.164)$$

Si los diafragmas están rígidos $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son constantes en A_1 y A_2 las áreas de los transductores

$$u_2 < \mathbf{p}_{B2} > A_2 = u_1 < \mathbf{p}_{B1} > A_1 \quad (4.165)$$

u_1 y u_2 componentes perpendiculares de la velocidad

Si el transductor 2 es pequeño, no se perturba el campo de presión p_1 , entonces

$$\mathbf{p}_{B2} = \mathbf{p}_1(r, \theta, \phi, t) \quad (4.166)$$

Entonces

$$u_2 \mathbf{p}_1(r, \theta, \phi, t) A_2 = u_1 < \mathbf{p}_{B1}(\theta, \phi, t) > A_1 \quad (4.167)$$

Si los transductores están ubicados tal que el eje acústico coincide para ambos

$$u_2 \mathbf{p}_{1AX}(r, t) A_2 = u_1 < u_1 \mathbf{p}_{B1ax}(t) > A_1 \quad (4.168)$$

Dividimos y tomamos módulo

$$\left| \frac{\mathbf{p}_1(r, \theta, \phi, t)}{\mathbf{p}_{1ax}(r, t)} \right| = \left| \frac{< \mathbf{p}_{B1}(\theta, \phi, t) >}{< \mathbf{p}_{B1ax} >} \right| \quad (4.169)$$

$$H(\theta, \phi) = H_r(\theta, \phi) \quad (4.170)$$

4.11 IMPEDANCIA DE RADIACIÓN

Impedancia de entrada cuerda es la razón entre la fuerza aplicada y la velocidad donde se aplica la fuerza

$$\mathbf{Z}_{m0} = \frac{\mathbf{f}(t)}{\mathbf{u}(0, t)} \quad (4.171)$$

Si existe un excitador no directo, un artefacto

$$\frac{\mathbf{f}(t)}{\mathbf{u}(0, t)} = \mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_{m0} \quad (4.172)$$

De igual forma, para fuentes acústicas → impedancia mecánica de entrada = impedancia mecánica de la fuente radiando en el vacío + impedancia de radiación del fluido

Para una fuente acústica:

$\bar{u}$: **Velocidad de la fuente en función de la posición**

$d\vec{f}_S$: **Componente de fuerza en la dirección del fluido generado por un elemento**

$\mathbf{Z}_R$: **Impedancia de radiación**

$$\mathbf{Z}_R = \int \frac{d\mathbf{f}_s}{\mathbf{u}} \quad (4.173)$$

Si la superficie de radiación tiene masa m , resistencia mecánica R_m y rigidez s

$$\mathbf{u}(t) = U_0 e^{j\omega t} = j\omega \xi \quad (4.174)$$

$$\mathbf{f}(t) = F_0 e^{j\omega t} \quad (4.175)$$

$\mathbf{u}(t)$: **Velocidad**

$\xi(t)$: **Desplazamiento**

$\mathbf{f}(t)$: **Fuerza Aplicada**

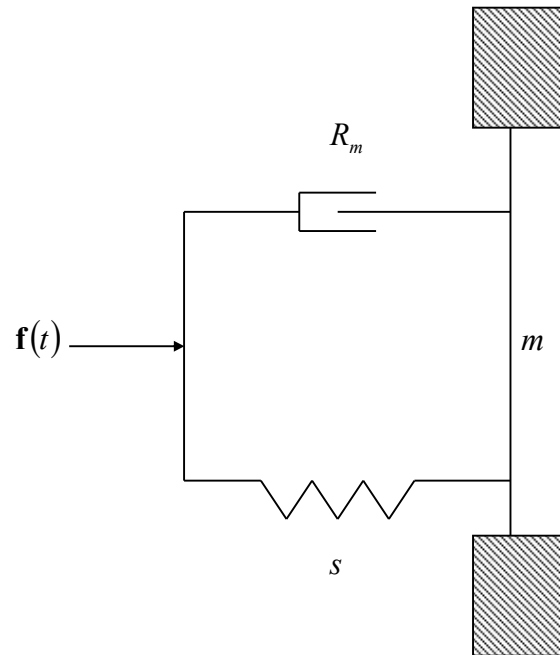


Figura 4.18. Impedancia de un Pistón

Ley de Newton

$$\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_s(t) - R_m \frac{d\xi}{dt} - s\xi = m \frac{d^2\xi}{dt^2} \quad (4.176)$$

$-\mathbf{f}_s$: fuerza del fluido sobre el pistón

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{Z}_r \mathbf{u} \quad (4.177)$$

Como

$$\mathbf{Z}_m = R_m + j\left(\omega m - \frac{s}{\omega}\right) \quad (4.178)$$

Entonces la velocidad se puede expresar como

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{f}(t)}{\mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_R} \quad (4.179)$$

o bien en términos de sus amplitudes

$$U_0 = \frac{F_0}{\mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_R} \quad (4.180)$$

Por lo tanto, el fluido actúa como una carga frente a la fuerza aplicada en conjunto con la impedancia mecánica. La impedancia de radiación

$$\mathbf{Z}_R = |\mathbf{Z}_R|e^{j\theta} = R_R + jX_R \quad (4.181)$$

R_R : **Resistencia de radiación** : Potencia disipada por la fuente

X_R : **Reactancia de radiación**

La potencia radiada

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T \Re\{\mathbf{f}_s\} \Re\{\mathbf{u}\} dt \quad (4.182)$$

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T \Re\{\mathbf{Z}_R \mathbf{u}\} \Re\{\mathbf{u}\} dt \quad (4.183)$$

$$W = \frac{1}{2} U_0^2 |\mathbf{Z}_R| \cos \theta = \frac{1}{2} U_0^2 R_R \quad (4.184)$$

La parte reactiva actúa como una masa

$$m_R = \frac{X_R}{\omega} \quad (4.185)$$

m_R : **Masa de radiación**

La frecuencia de resonancia del oscilador

$$f_0 = \sqrt{\frac{s}{m + m_R}} \quad (4.186)$$

Es casi insignificante en el aire pero se debe considerar en ciertas situaciones. Es importante en líquidos (agua). Para un pistón circular

Fuerza de Reacción en un Pistón

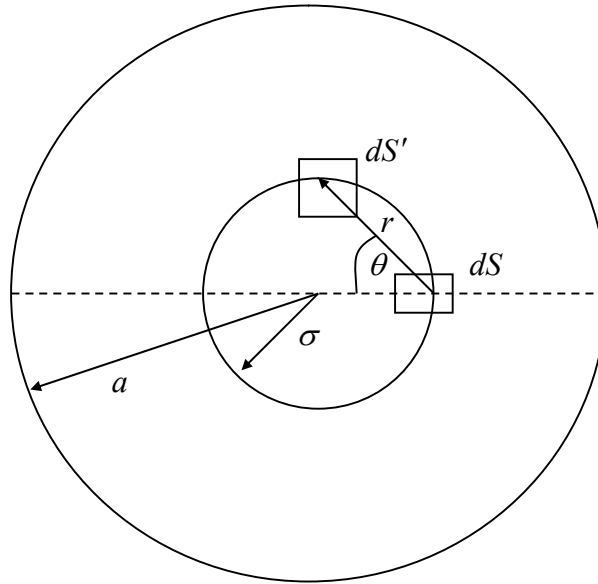


Figura 4.19. Fuerza de reacción de un Pistón

La impedancia de radiación es obtenida al calcular la fuerza de reacción producto de la presión sonora emitida por el pistón sobre él mismo.

$$\mathbf{p} = \int j \frac{\rho_0 c k}{2\pi} U_0 e^{j(\omega t - kr)} dS \quad (4.187)$$

$$\mathbf{f}_s = - \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S}' \quad (4.188)$$

$$\mathbf{f}_s = -j\rho_0 c k U_0 e^{j\omega t} \int d\mathbf{S}' \times \int \frac{e^{-jkr}}{r} dS \quad (4.189)$$

θ : ángulo entre dS y dS'

$$dS = r d\theta dr$$

$2\sigma \cos \theta$: máxima distancia entre dS' y un punto en círculo de radio σ .

$$dS' = \sigma d\psi d\sigma$$

Entonces

$$\mathbf{f}_s = -j \frac{\rho_0 c k}{\pi} U_0 e^{j\omega t} \int_0^a \sigma d\sigma \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sigma \cos \theta} e^{-jkr} dr \quad (4.190)$$

$$\mathbf{f}_s = -\rho_0 c \pi a^2 U_0 e^{j\omega t} [R_1(2ka) + jX_1(2ka)] \quad (4.191)$$

$$\mathbf{Z}_R = \frac{\mathbf{f}_s}{U_0} = \rho_0 \pi a^2 [R_1(2ka) + jX_1(2ka)] \quad (4.192)$$

$$\mathbf{Z}_R = R_R + jX_R \quad (4.193)$$

Donde

$$R_R = \pi a^2 \rho_0 c R_1(2ka) \quad (4.194)$$

$$X_R = \pi a^2 \rho_0 c X_1(2ka) \quad (4.195)$$

$$R_1(x) = 1 - \frac{2J_1(x)}{x} = \frac{x^2}{2^2 \cdot 1! \cdot 2!} - \frac{x^4}{2^4 \cdot 2! \cdot 3!} + \dots \quad (4.196)$$

$$X_1(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} + \frac{x^5}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right) \quad (4.197)$$

Para bajas frecuencias $ka \ll 1$

$$R_R = \frac{1}{2} \pi a^2 \rho_0 c (ka)^2 \quad (4.198)$$

$$X_R = \pi a^2 \rho_0 c \frac{8}{3\pi} (ka) \quad (4.199)$$

El pistón está cargado por un cilindro de área a y altura $\frac{8a}{3\pi}$

Para altas frecuencias $ka \gg 1$

$$R_R = \pi a^2 \rho_0 c \quad (4.200)$$

$$X_R = 0 \quad (4.201)$$

$$\mathbf{Z}_R = \pi a^2 \rho_0 c \quad (4.202)$$

La potencia emitida es

$$W = \frac{1}{2} \rho_0 c \pi a^2 U_0^2 \quad \text{Pistón circular} \quad (4.203)$$

$$W = \frac{1}{2} \rho_0 c S U_0^2 \quad \text{Otras fuentes} \quad (4.204)$$

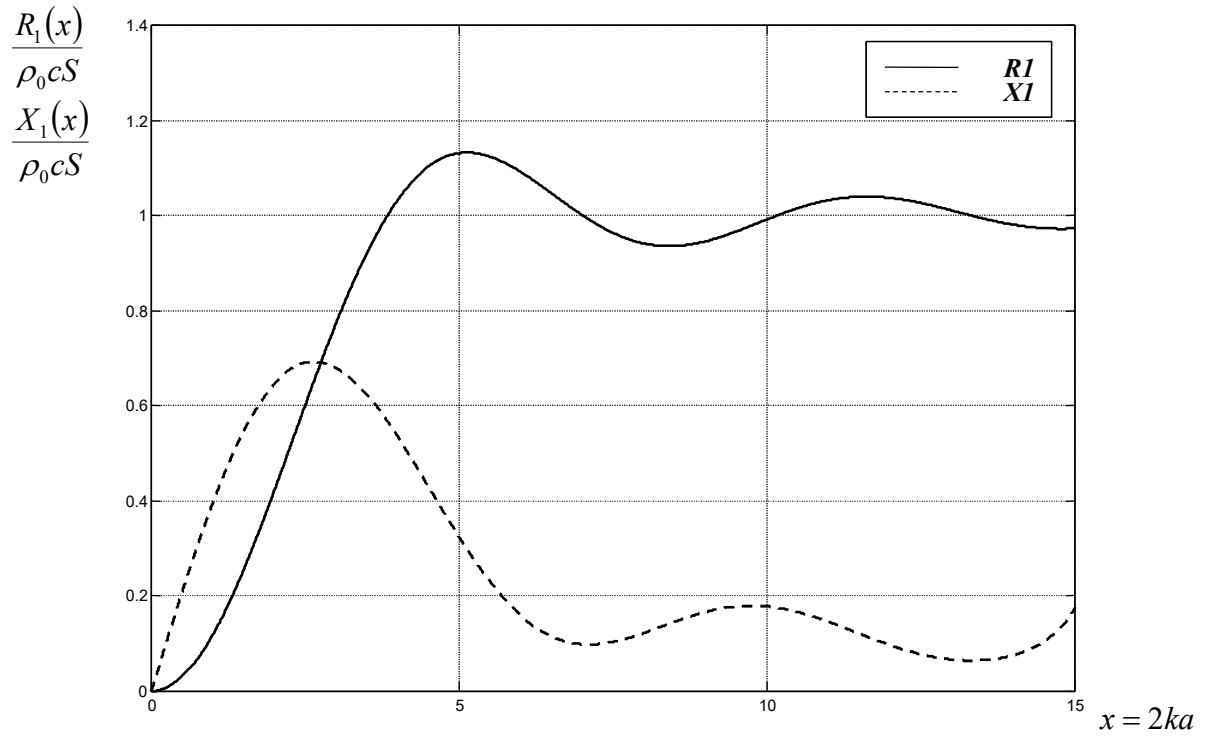


Figura 4.20. Resistencia y Reactancia de Radiación de un Pistón

Para bajas frecuencias $ka \ll 1$

$$R_R = \frac{1}{2} \pi a^2 \rho_0 c (ka)^2 \quad (4.198)$$

$$X_R = \pi a^2 \rho_0 c \frac{8}{3\pi} (ka) \quad (4.199)$$

El pistón está cargado por un cilindro de área a y altura $\frac{8a}{3\pi}$

Para altas frecuencias $ka \gg 1$

$$R_R = \pi a^2 \rho_0 c \quad (4.200)$$

$$X_R = 0 \quad (4.201)$$

$$Z_R = \pi a^2 \rho_0 c \quad (4.202)$$

La potencia emitida es

$$W = \frac{1}{2} \rho_0 c \pi a^2 U_0^2 \quad \text{Pistón circular} \quad (4.203)$$

$$W = \frac{1}{2} \rho_0 c S U_0^2 \quad \text{Otras fuentes} \quad (4.204)$$

Impedancia de Radiación Esfera Pulsante

$$Z_R = 4\pi a^2 \rho_0 c \cos \theta_a e^{j\theta_a} \quad (4.205)$$

Para altas frecuencias $ka \gg 1$

$$R_R \cong 4\pi a^2 \rho_0 c \quad (4.206)$$

$$X_R = 0 \quad (4.207)$$

Para bajas frecuencias $ka \ll 1$

$$Z_R = R_R + jX_R \quad (4.208)$$

$$Z_R \cong 4\pi a^2 \rho_0 c (ka)^2 + j4\pi a^2 \rho_0 c (ka) \quad (4.209)$$

$$m_R = \frac{X_R}{\omega} = 3\rho_0 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) \quad (4.210)$$