# **ECUACION DE ONDA**

## DEFINICIÓN

Definimos una ecuación de onda como el modelo matemático capaz de describir un proceso de propagación de energía ondulatoria considerando sus condiciones iniciales y de contorno (frontera). Partiremos con el caso unidimensional

x

0

L

Sujeta a (variadas) condiciones de contorno

## Condiciones de Contorno de Drichelet

Estas corresponden a condiciones de contorno donde los valores de la presión sonora están prescritos

* En este primer caso se puede interpretar como ondas sonoras en un tubo que tiene ambos extremos abiertos. O también estas condiciones de contorno corresponden a una cuerda con ambos extremos fijos
* Cuando tenemos una fuente de presión sonora en un extremo con valores conocidos y el otro extremo abierto. Este caso corresponde a régimen permanente y ha sido resuelta con todo detalle en Física Acústica

## Condiciones de Contorno de Neumann

Estas corresponden a condiciones de contorno donde los valores de la primera derivada parcial con respecto a la variable de la presión sonora están prescritos.

* En este primer ejemplo tenemos un tubo cerrado en ambos extremos con tapas infinitamente rígidas
* Podemos además tener condiciones de contorno mixtas, como el caso de un tubo con una fuente y cerrado en otro extremo en régimen permanente como fue profundamente analizado en Física Acústica

## Condiciones de Contorno de Robin

* Impedancia acústica específica en ambos extremos del tubo (material absorbente)

## Condiciones Iniciales

Si nuestra situación está asociada a régimen transiente debemos considerar las condiciones iniciales, las que están asociadas a una distribución inicial de presión sonora y una taza de la presión sonora con respecto al tiempo

## ECUACIÓN DE ONDA TUBO ABIERTO EN AMBOS EXTREMOS / ECUACIÓN DE ONDA DE CUERDA FIJA EN AMBOS EXTREMOS

Analizaremos la ecuación de onda en régimen transiente, es decir la ecuación de onda, sus condiciones de contorno y condiciones iniciales son las siguientes

* Condiciones de contorno
* Condiciones Iniciales

Usaremos el método de separación de variables, el cual asume que la solución es de la forma

Lo integrar a la ecuación de onda

Se multiplica a ambos lados por el inverso de

La primera parte solamente depende de y la segunda de

Entonces podemos separar las ecuaciones en dos ya que las variables son independientes, donde

Entonces

La constante es la misma para ambos lados de la ecuación y se designa de manera conveniente . Como resultado podemos separar y desacoplar las ecuaciones y sus condiciones de contorno

## Primera Ecuación

Necesitamos arreglar la ecuación de forma más conveniente

La solución corresponde a un oscilador armónico

Evaluamos en la primera condición de contorno

Y reformulamos la solución de la forma

Evaluamos en la segunda condición de contorno

La única forma en que esta condición se cumpla es para un conjunto discreto e infinito de valores de dados por

Esto implica que obtenemos un conjunto infinito de soluciones . Además, podemos hacer sin perder generalidad en los resultados

Donde los están asociados a los números de onda. Reiteramos los resultados

Y por lo tanto poseo infinitas soluciones para la ecuación y sus condiciones de contorno, además, hacer la constante sin perder generalidad. Podemos considerar e interpretar que tenemos en la llamada Primera Ecuación como un conjunto de infinitas ecuaciones con infinitas soluciones

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Ecuación | Solución |  |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| … |  |  |  |
| n |  |  |  |
| … |  |  |  |

## Segunda Ecuación

Y a esta se le asocian las condiciones iniciales y , las cuales serán incorporadas al final de este proceso

La ajustaremos de igual forma que en el caso anterior, pero considerando que obtuvimos valores que cumplen con las condiciones de contorno

Y llamando , en realidad tenemos infinitas n ecuaciones diferenciales con respecto al tiempo

Donde corresponden a las frecuencias angulares de resonancia o frecuencias naturales angulares

Las frecuencias de resonancia o frecuencias naturales se obtienen dividiendo por

|  |  |
| --- | --- |
|  | frecuencia |
| 1 – Primer armónico o fundamental |  |
| 2 – Segundo armónico |  |
| 3 – Tercer armónico |  |
| etc… | etc… |

En este caso debemos considerar que lo que obtenemos a partir del caso anterior es un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma

Las soluciones son

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Ecuación | Solución |  |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| … |  |  |  |
| n |  |  |  |
| … |  |  |  |

Recordemos que la presión sonora es

Pero debido a la multiplicidad de las soluciones tenemos

Como cada una de las soluciones es linealmente independiente de las otras la forma que debe tener la solución corresponde a una combinación lineal de todas

A esto le aplicamos las condiciones iniciales, por la misma razón debemos determinar la derivada parcial con respecto al tiempo

## Primera Condición Inicial

Tenemos una serie de Fourier que nos permite determinar todos los valores de

## Segunda Condición Inicial

Usando una serie de Fourier y convirtiendo

## ECUACIÓN DE ONDA DE CUERDA FIJA EN AMBOS EXTREMOS

Por todo lo realizado anteriormente tenemos

Como podemos decir

Determinamos la integral de Fourier

Resolvemos la primera integral

La segunda integral

Sumamos las integrales para obtener

Entonces la solución completa es

Las soluciones son altamente dependiente de las condiciones de contorno. Si ellas cambian cambia también los valores de y

## ECUACIÓN DE ONDA TUBO ABIERTO EN AMBOS EXTREMOS / ECUACIÓN DE ONDA DE CUERDA FIJA EN AMBOS EXTREMOS CON AMORTIGUAMIENTO

Analizaremos la ecuación de onda en un tubo abierto en un extremo y cerrado en el otro con amortiguamiento, en régimen transiente, es decir la ecuación de onda, sus condiciones de contorno y condiciones iniciales son las siguientes

* Condiciones de contorno
* Condiciones de iniciales

## Variables Separables

Ecuación

Reemplazamos la solución

Dividimos por a ambos lados de la ecuación

Separamos ambas ecuaciones

La primera

La segunda

## Primera Ecuación

Con las condiciones de contorno

Desarrollamos la primera ecuación

La solución la podemos identificar como

Usamos la primera condición de contorno

La solución se convierte en

La segunda condición de contorno

Sin pérdida de generalidad y obtenemos infinitas soluciones

Entonces al observar la segunda ecuación

Tenemos infinitas ecuaciones

Esto nos lleva al polinomio característico

Consideramos movimiento subamortiguado

Esto nos lleva al polinomio característico

La solución

La presión sonora toma la forma

La solución completa es la combinación lineal de todas las soluciones

Las constantes y se determinan de las condiciones iniciales. La derivada parcial con respecto al tiempo es

Al aplicar la condición inicial

Lo que es una serie de Fourier

La segunda condición inicial

Lo que es otra serie de Fourier

Donde

Entonces

Sabemos que porque entonces

* 1. ECUACIÓN DE ONDA TUBO CERRADO EN UN EXTREMO ABIERTO EN EL OTRO CON AMORTIGUAMIENTO

Analizaremos la ecuación de onda en régimen transiente, es decir la ecuación de onda, sus condiciones de contorno y condiciones iniciales son las siguientes

* Condiciones de contorno
* Condiciones Iniciales

Variables separables

Dividimos ambos lados por

Tenemos dos ecuaciones desacopladas

Las derivadas parciales pueden considerarse derivadas totales

Primera Ecuación

La primera ecuación se puede asociar a las condiciones de contorno

Ordenemos la ecuación

La solución es de la forma

Su primera derivada

Evaluamos la primera condición de contorno

Entonces y rescribimos la solución como

La segunda condición establece

La única forma en que esta expresión sea nula es para el conjunto infinito y discreto de valores

Por lo tanto, a fin de que la solución cumpla a cabalidad las condiciones de contorno, tendremos un conjunto infinito de soluciones de la forma. Además, sin pérdida de generalidad podemos hacer que la constante

Segunda Ecuación

Tenemos esta ecuación la cual será asociada a las condiciones iniciales

Pero al observar que los valores de son infinitos. En el fondo se procederá a resolver un conjunto infinito y discreto de ecuaciones diferenciales

Multiplicamos por

Multiplicamos por

Llamamos

Donde , son las infinitas frecuencias naturales angulares

Las frecuencias naturales o frecuencias de resonancia o armónicos son

El polinomio asociado es

Asumiremos que el caso de sub amortiguamiento

Factorizamos por en la raíz cuadrada

Llamamos al término como frecuencia natural amortiguada

Donde el término es llamado razón de amortiguamiento modal

Finalmente

Y tenemos el conjunto de soluciones

La presión sonora posee múltiples soluciones de la forma

La solución completa estará dada por la combinación lineal de las soluciones

Entonces la solución es

La primera derivada parcial temporal de la solución es

Aplicaremos las condiciones iniciales

La primera es

Entonces

Aplicamos la segunda condición de contorno

Entonces

Podemos llamar

Entonces usando la serie de Fourier calculamos los coeficientes

Lo que quiere decir

Entonces la solución al aplicar las condiciones de contorno e iniciales

## ECUACIÓN DE ONDA BIDIMENSIONAL MEMBRANA FIJA EN TODOS LOS EXTREMOS CON AMORTIGUAMIENTO

Analizaremos la ecuación de onda en régimen transiente, es decir la ecuación de onda, sus condiciones de contorno y condiciones iniciales son las siguientes

* Condiciones de contorno
* Condiciones Iniciales

Usaremos el método de separación de variables, el cual asume que la solución es de la forma

Reemplazamos en la ecuación de onda

Dividimos por a ambos lados de la ecuación

Separamos todas las ecuaciones

Primera Ecuación

Condiciones de Contorno

Solución

Primera condición de contorno

Entonces

Segunda condición de contorno

Entonces

Entonces sin pérdida de generalidad podemos hacer y obtenemos la familia de soluciones de la forma

Segunda Ecuación

Condiciones de Contorno

Solución

Primera condición de contorno

Entonces

Segunda condición de contorno

Entonces

Entonces sin pérdida de generalidad podemos hacer y obtenemos la familia de soluciones de la forma

La tercera ecuación

Para que su solución sea viable se debe cumplir

Entonces

Definimos

Frecuencias naturales angulares

Frecuencias naturales o de resonancia

La ecuación queda como

Por lo tanto, llamando

Ecuación característica

Las raíces son

Donde

Entonces

Tenemos el conjunto de soluciones

Entonces

La combinación lineal de todas las soluciones es también la solución

La derivada parcial de la solución es

Aplicamos la primera condición inicial y obtenemos una serie de Fourier doble

Donde los coeficientes son calculados

La segunda condición inicial es

Llamamos

Donde se determina usando

Entonces los coeficientes son determinados por

Consideremos como ejemplo las condiciones iniciales

De la primera condición inicial vemos que los valores de los coeficientes son nulos

De la segunda condición inicial tenemos

Entonces

Separamos

Entonces al usar