# **ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN (EDO1)**

## DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL

Definimos una ecuación diferencial como aquella ecuación cuya incógnita es una función que depende en una primera instancia, del tiempo, y la relación entre las distintas variables es expresada a partir de las derivadas

En una Ecuación Algebraica, el objetivo es determinar el valor de , que es un número real o complejo, tal que se cumpla la igualdad

Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) Lineal de orden es:

Una ecuación no lineal de segundo orden puede ser

O también donde , *,* son constantes reales

## ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN DE VARIABLES SEPARABLES

Una ecuación diferencial lineal de primer orden puede ser expresada como

Si dividimos por

La forma estándar de una EDO de 1er Orden Lineal

Cuando en un no existe solución en ese intervalo, como ejemplo la solución es válida para todo , exceptuando

La forma estándar de una EDO de 1er Orden Lineal es de Variables Separables

Como ejemplo podemos tener el caso

El método de resolución genérico es

Separamos las variables

O bien

La constante depende de las condiciones iniciales. Es decir que el problema completo es de la forma

Donde e son conocidos

Ejemplo

La función Integral Exponencial definida por

¿Como despejamos en este tipo de problema? Las tablas y aplicaciones de internet ya no son suficientes para resolver este tipo de problemas. En este tipo de ecuaciones podemos usar soluciones de carácter numérico que permiten obtener un resultado que sea interpretable y que sea capaz de presentar una interpretación de modelo.

Otro ejemplo

La condición inicial sirve para determinar la constante

Finalmente

Ejemplo

Usamos la condición inicial

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

El siguiente ejemplo no tiene condiciones iniciales

Gráfico, Histograma

Descripción generada automáticamente

Otro ejemplo

Como en otros casos estamos en una situación que de forma analítica no podemos determinar de manera analítica, pero si de forma numérica. El método de Euler es un primer paso natural e intuitivo para analizar estas situaciones, lo cual se abordará al final del capítulo.

## ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial lineal de primer orden puede ser expresada como

Con condiciones iniciales

Siempre y cuando podemos decir que

Para poder resolverla debemos inicialmente determinar la solución complementaria, también llamada solución de la ecuación homogénea

Usamos variables separables

La solución particular es aquella que forma parte de

Asumiremos que

Esta técnica se conoce como variación de parámetros donde es la solución complementaria cuando

Por razones de comodidad en la notación

Volvamos a

Factorizamos por

Como es una de las soluciones de la ecuación homogénea cumple con

Si se desea de forma teórica se puede escribir la solución completa de la ecuación diferencial

Ejemplo

Lo primero es ordenar de manera eficiente y notar que para no tenemos solución

Solución complementaria

Entonces

La solución es

Aplicamos las condiciones iniciales

Imagen que contiene foto, agua, grupo, barco

Descripción generada automáticamente

Otro ejemplo

Solución complementaria de la ecuación homogénea

La función a fin de calcular la solución particular es

## ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN EXACTA

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden homogénea de la forma

La podemos ordenar como

Indirectamente podemos observar una función

Que satisface esta igualdad. Reescribimos

Entonces una ecuación de primer orden puede ser reformulada como una Ecuación Diferencial de Primer Orden Exacta

Supongamos esta ecuación diferencial de primer orden no lineal

Donde

A partir de esto tenemos un criterio para resolver, si partimos de la definición

La ecuación será exacta y tendrá solución si

En forma más corta

Método de Solución 1

Paso 1: comprobar si se cumple la igualdad

Paso 2: entonces como se cumple esta expresión podemos integrar respecto a

Paso 3: derivamos respecto a la variable y además igualamos a

Paso 4: la función se calcula como

Tarea Determinar el otro método de solución es decir asumir que

Método de Solución 2

Paso 1: comprobar si se cumple la igualdad

Paso 2: entonces como se cumple esta expresión podemos integrar respecto a

Paso 3: derivamos respecto a la variable y además igualamos a

Ejemplo

Comprobamos la igualdad

Integramos

Gráfico, Gráfico de superficie

Descripción generada automáticamente

Gráfico, Gráfico de superficie

Descripción generada automáticamente

Diagrama

Descripción generada automáticamente con confianza baja

A veces con este método no podemos determina como función de pero podemos determinar ciertos comportamientos

## ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN EXACTA: MÉTODO DEL FACTOR INTEGRANTE

A veces una ecuación diferencial de la forma

No puede ser convertida en exacta porque

En algunos casos se puede convertir en ecuación exacta usando un factor integrante

El que me permite

Lo que convierte la ecuación anterior en exacta. Escribimos esto de manera sintética

Tenemos dos posibles caminos. Primero supongamos que , por lo tanto, la derivada parcial con respecto a es nula

Tenemos entonces la ecuación diferencial ordinaria de primer orden de variables separables

La cual tendrá solución si y solamente si

Podemos hacer sin perder generalidad

De igual forma y como tarea el factor de integración puede ser determinado como

Ejercicios

Y la esperada igualdad no se cumple, entonces debemos buscar un factor integrador. Debemos observar cual elegir

Lo más adecuado es observar que no será el factor integrante

Mientras que

Integramos

Ahora volvemos a la ecuación diferencial original

Recalculamos las nuevas derivadas

Al ser iguales, podemos resolver por el método más adecuado

## ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN: MÉTODO EULER

Consideremos inicialmente la ecuación diferencial de primer orden con condición incial

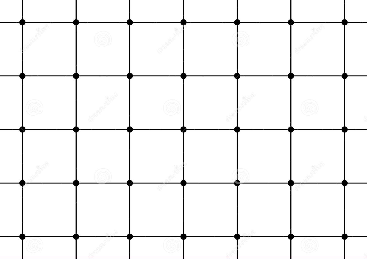
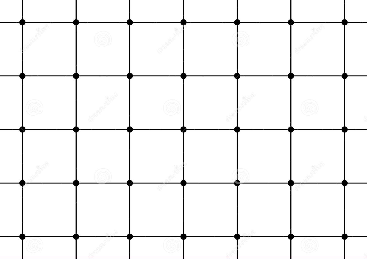
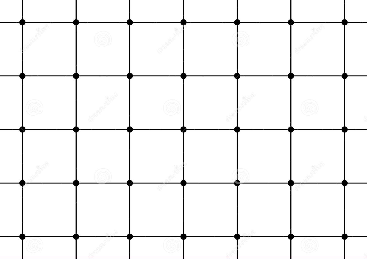
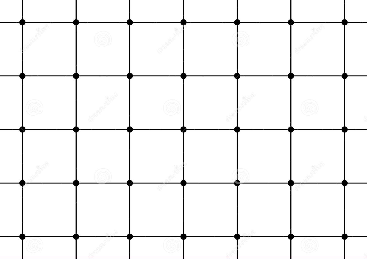
Es una ecuación de variables separables

Usamos la condición inicial

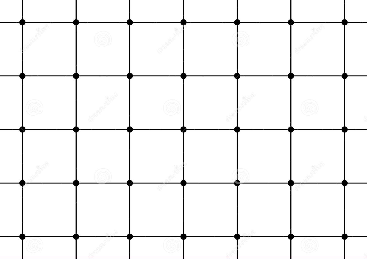
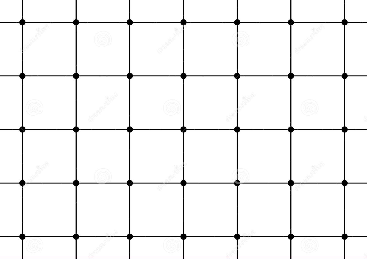
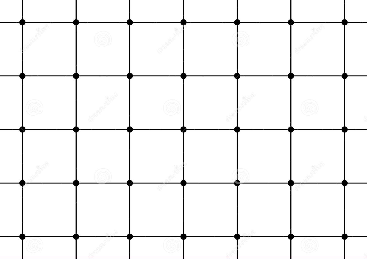
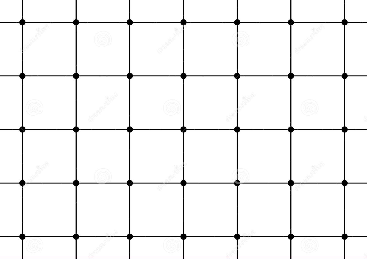
Y claramente vemos que y entonces la ecuación diferencial tiene solución

Podemos pensar en la ecuación diferencial como

Pensemos en el siguiente resultado usando la condición inicial , es decir cuando



Pensemos en el siguiente resultado usando la condición inicial , es decir cuando



Si realizamos para este proceso para cada punto del plano es decir para cada condición inicial posible de la forma obtenemos el Campo Direccional de la ecuación diferencial de primer orden. Este corresponde a todos los vectores (flechas) condiciones iniciales posibles a partir, en nuestro ejemplo de la ecuación

Este gráfico es llamado campo Direccional de la Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden

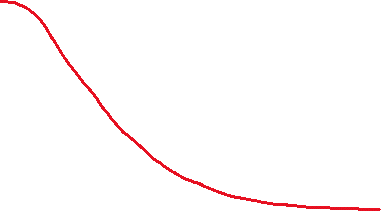
Gráfico

Descripción generada automáticamente con confianza baja

¿Si se me presenta este grafico y la condición inicial cual sería la solución aproximada que podría estimar?

Gráfico

Descripción generada automáticamente con confianza baja



Una posible solución de carácter intuitivo es “seguir las flechas”. Por supuesto debemos construir un método matemático que organice el concepto de “seguir las flechas”

Todos los puntos de los vectores, las “bases de las flechas” flechas se ubican en todas las posibles combinaciones de condiciones iniciales y los vectores tienen componentes dadas por la siguiente expresión

Consideremos una ecuación diferencial de primer orden genérica, no lineal con su condición inicial

La rescribimos como

En forma más general, podemos escribir la ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal con su condición inicial

Donde . Entonces recordemos que la derivada evaluada en un punto es la pendiente de la recta tangente a esa función,

Diagrama

Descripción generada automáticamente

En el punto la recta es

Entonces

Podemos aproximar el valor la función para un cierto con la misma recta

A continuación, podemos calcular la pendiente de la recta tangente que pasa por la función en el punto

Y entonces podemos hacer el mismo procedimiento para y después para y después para… , etc.

Podemos extender este proceso a partir de una fórmula genérica para una solución numérica y aproximada, obviamente iniciamos este proceso para