# ONDAS EN TUBOS

## Onda Plana en Tubo Cerrado

Trabajaremos con la ecuación de onda plana, donde supondremos que esta se propaga en un tubo de longitud , de sección circular de radio donde se requiere como condición principal para la existencia de ondas planas que el diámetro del tubo sea mucho menor que la longitud de onda

La ecuación de onda es

La primera condición de contorno es la existencia de una fuente en , la cual es de carácter senoidal con amplitud fija de una frecuencia conocida . El régimen es estacionario

La segunda condición de contorno corresponde a que el tubo esta cerrado idealmente, con una tapa de rigidez infinita y sin ningún tipo de absorción. En la práctica esto quiere decir que la velocidad de partículas al final de tubo es nula

Usando la ecuación de fuerza unidimensional simplificada tenemos que

Y asumiendo que y

Entonces si esto quiere decir que , finalmente la segunda condición de contorno es expresable como

Asumiremos la presencia de ondas planas incidentes y reflejadas en régimen estacionario. El régimen transiente se estudiará en Ecuaciones Diferenciales.

Evaluamos estas ecuaciones con sus respectivas condiciones de contorno. Partimos con la condición de contorno al principio del tubo

La condición al final del tubo

Esto se puede considerar como un sistema de ecuaciones

Entonces debemos determina las constantes y acomodar los resultados de tal forma que podamos explicitar las propiedades del sonido cuando se propaga en un tubo cerrado. Comenzamos por la primera

Y remplazamos en la segunda

Calculamos la otra constante

Reemplazamos

Factorizamos

## Resonancia

Como el tubo no posee absorción es claro que cuando el denominador se hace cero, la presión es infinita, en este caso que es ideal esto sucede para un cierto número discreto de frecuencias de orden infinito

Las frecuencias angulares de resonancia se obtienen multiplicando por la velocidad del sonido

Las frecuencias de resonancia son

## Nodos

Al observar el numerador vemos que existe un conjunto discreto y limitado donde la presión es nula

Puntos nodales o Nodos y es una característica que define el comportamiento de ondas estacionarias dentro de un tubo. Los nodos se cuenten desde el final de tubo hacia atrás

## Impedancia Acústica Específica de Entrada

Esta se define por la razón entre presión y velocidad de partículas al inicio del tubo. El sistema acústico se observa desde la perspectiva de la fuente, este sistema acústico es caracterizado por una impedancia acústica específica

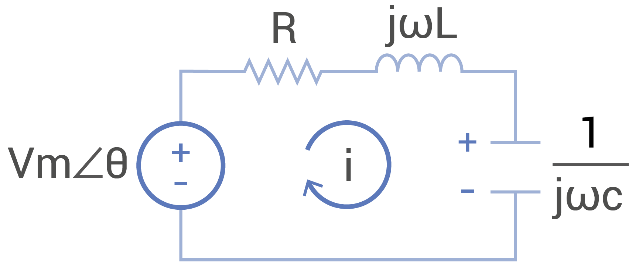
Entonces se hace necesario determinar de forma genérica la velocidad de partículas a partir de la expresión final de la presión sonora en el tubo y de la ecuación de fuerza.

Reemplazamos

Una manera de interpretar el término imaginario en la velocidad de partículas es simplemente considerar que la presión sonora está desfasada en 90 grados o . Lo cual se manifiesta en un retardo de tiempo de la velocidad de partículas respecto a la presión dado por

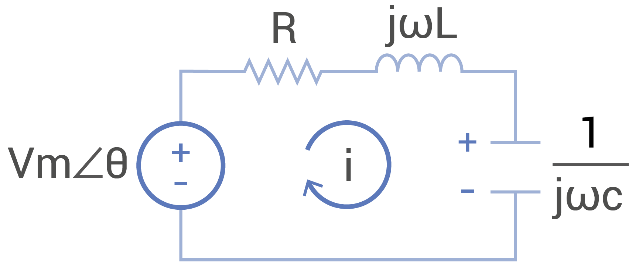
La impedancia acústica específica

La resonancia se produce cuando la parte imaginaria de la impedancia de entrada es nula, es decir . Esto implica que la velocidad de partículas es máxima y por ende la potencia en el tubo es máxima Como ejemplo podemos ver que esto sucede también para un sistema más simple como un circuito RLC



La impedancia de entrada que ve la fuente de voltaje es

Lo cual se produce para la frecuencia de resonancia



Para la frecuencia de resonancia la potencia es

Para frecuencias distintas a la de resonancia

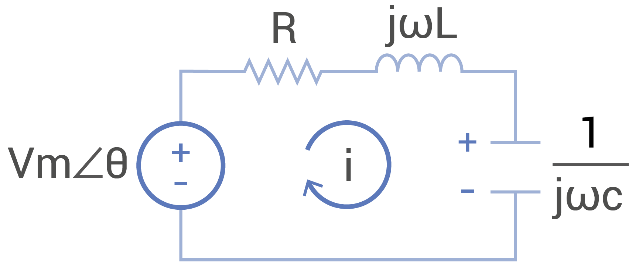
Entonces la potencia en el sistema eléctrico en resonancia es siempre mayor a la potencia en frecuencias que no son frecuencias de resonancia

En el caso del tubo cerrado la impedancia acústica específica de entrada es puramente imaginaria, esto se debe a que no incorporamos ningún material absorbente, entonces tendremos variadas frecuencias de resonancia la cuales se producen para

Tenemos las frecuencias naturales angulares

Tenemos las frecuencias naturales

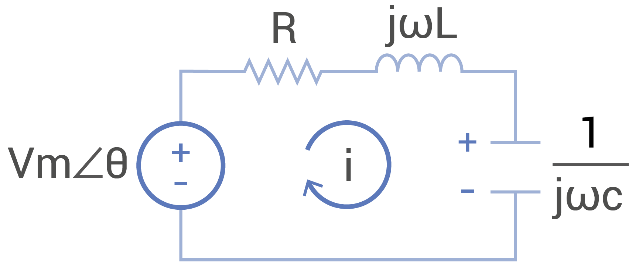
Comparando la analogía eléctrica en resonancia cuando al no existir parte resistiva , porque no hay materiales absorbentes, tenemos análogo a un circuito cerrado sin resistencia.



Eso quiere decir que la velocidad de partículas es infinita en la entrada , en teoría la potencia acústica debería ser infinita. En la práctica no lo es ya que estamos tratando con un modelo ideal.

Si la impedancia acústica de entrada es infinita tenemos anti - resonancia

Esto es análogo a un circuito abierto



En un tubo real en resonancia la presión no es infinita y en anti - resonancia la presión sonora nunca es nula.

La impedancia mecánica de entrada se obtiene si la impedancia acústica específica de entrada es multiplicada por la superficie de la sección transversal del tubo obtenemos la impedancia mecánica de entrada es la fuerza

La impedancia acústica de entrada se obtiene si la impedancia acústica específica de entrada es dividida por la superficie de la sección transversal del tubo obtenemos la acústica de entrada es la velocidad volumétrica

Corresponde ahora analizar la impedancia mecánica de entrada de un tubo cerrado cuando la longitud de onda es mucho mayor que la longitud del tubo . Dicho de otra forma, analizaremos el comportamiento de bajas frecuencias

Si el tubo es corto y la frecuencia baja tubo o bien . Por lo tanto, podemos aproximar

Recordemos que esto es válido para ángulos medidos en radianes

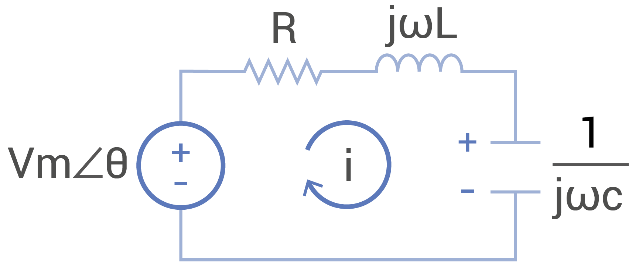
Llamaremos compliancia mecánica a

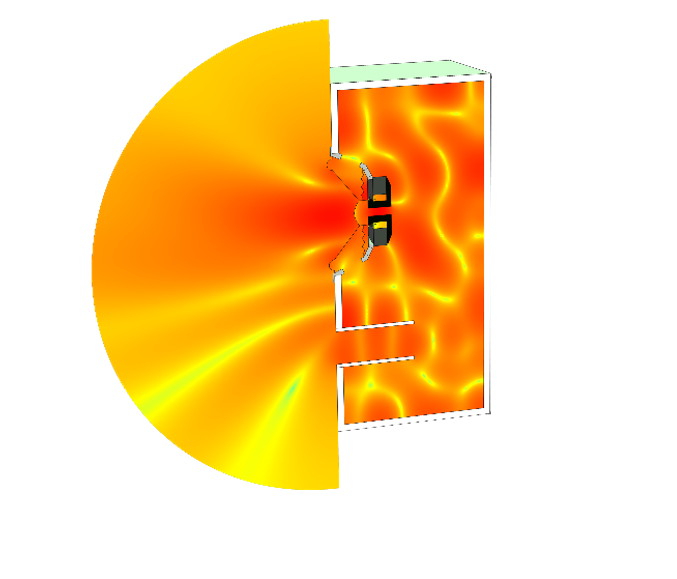
Analizaremos sus unidades

Dicho de otra manera, la compliancia mecánica es proporcional a la razón de distancia dividido por la fuerza. Por ende, la compliancia es el inverso multiplicativo de la elasticidad de un resorte. Un tubo cerrado que cumple con o bien , se comporta como un resorte de constante , almacenando energía potencial elástica

Al mirar la expresión

Vemos un comportamiento análogo a un capacitor eléctrico ideal cuya impedancia eléctrica es





## Onda Plana en Tubo Abierto

Trabajaremos con la ecuación de onda plana, donde supondremos que esta se propaga en un tubo de longitud , de sección circular de radio donde se requiere como condición principal para la existencia de ondas planas que el diámetro del tubo sea mucho menor que la longitud de onda

La ecuación de onda es

Las condiciones de contorno son

Usamos la solución armónica

Aplicamos la primera condición de contorno

Aplicamos la segunda condición de contorno

Obtenemos

Tenemos un sistema de ecuaciones

Partimos entonces en la primera ecuación

Reemplazamos

Para obtener la otra constante reemplazamos en

Usamos estos resultados en la solución armónica

Y al simplificar, factorizar y otras operaciones que se dejan como tarea tenemos

## Resonancia

Analizamos el denominador y cuando este se anula hablamos de resonancia

Eso quiere decir que estamos en una situación de resonancia

Las frecuencias de resonancia angulares son

Las frecuencias naturales son

## Nodos

Los nodos se producen en puntos fijos cuando el numerador es nulo

Por ende los nodos

## Impedancia Acústica Específica de Entrada

El sistema acústico se observa desde la perspectiva de la fuente, este sistema acústico es caracterizado por una impedancia acústica específica

La velocidad de partículas es dada por

En el caso del tubo cerrado la impedancia acústica específica de entrada es puramente imaginaria, debido a que no existe absorción en el tubo, es un caso ideal, entonces tendremos variadas frecuencias de resonancia la cuales se producen para

Las frecuencias naturales angulares se producen

Las frecuencias naturales se producen

Encontrando las mismas frecuencias de resonancia. Es interesante observar que sucede cuando la longitud de onda es más larga que la longitud del tubo

Revisamos la impedancia acústica específica de entrada

La cual si es multiplicada por la superficie de la sección transversal del tubo obtenemos la impedancia mecánica de entrada es la fuerza

Si dividimos la impedancia acústica específica por el área de la sección transversal del tubo tenemos la impedancia acústica es la velocidad de volumen

Analicemos la impedancia mecánica cuando la longitud de onda es mucho más larga que la longitud del tubo y

Aproximamos

Y reconocemos el producto de la sección transversal por la longitud como el volumen

Y claramente al multiplicar el volumen por la densidad obtendremos la masa mecánica que corresponde a la masa del aire dentro del ducto abierto

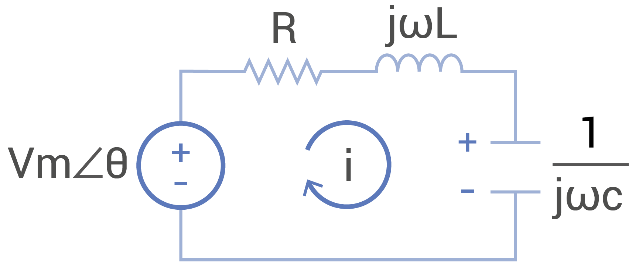
Forma, Gráfico circular

Descripción generada automáticamente

La relación entre lo acústico y lo mecánico en un sistema parecido a este es

|  |  |
| --- | --- |
|  | Forma, Gráfico circular  Descripción generada automáticamente |

Tanto en el sistema mecánico como en el acústico existe pérdidas de energías, relacionadas con el amortiguador viscoso en el primero y la colocación de material de absorción sonora en el segundo



La masa mecánica/acústica, está relacionada con la inductancia del circuito eléctrico

Un modelo más realista del tubo abierto significa considerar la impedancia de radiación sonora, esto quiere decir que a la impedancia de entrada se le debe sumar la de radiación

Tomado este dato del capítulo anterior para un pistón circular plano

Entonces la resonancia se produce cuando la parte imaginaria de la impedancia de entrada es nula

Pero en “bajas frecuencias” podemos aproximar Tubo abierto con pestaña/montado en una pantalla infinita el efecto es un “alargamiento del tubo”

Las frecuencias naturales se producen

Tubo abierto sin pestaña/sin pantalla infinita el efecto es un “alargamiento del tubo”

Físicamente podemos explicar el “alargamiento” de este tubo debido a que en bajas frecuencias el aire se desplaza como un todo

En los futuros cursos de Acústica Arquitectónica y Electroacústica, el “alargamiento” del tubo será abordado de manera más práctica

## Analogías Electro Mecano Acústicas

Este tipo de modelo que es muy útil para diseñar micrófonos, parlantes, cajas acústicas, resonadores y absortores sonoros, está basado en los comportamientos másicos, elásticos, de tubos y cavidades; en conjunto con la disipación de energía sonora la cual se trata como resistencia

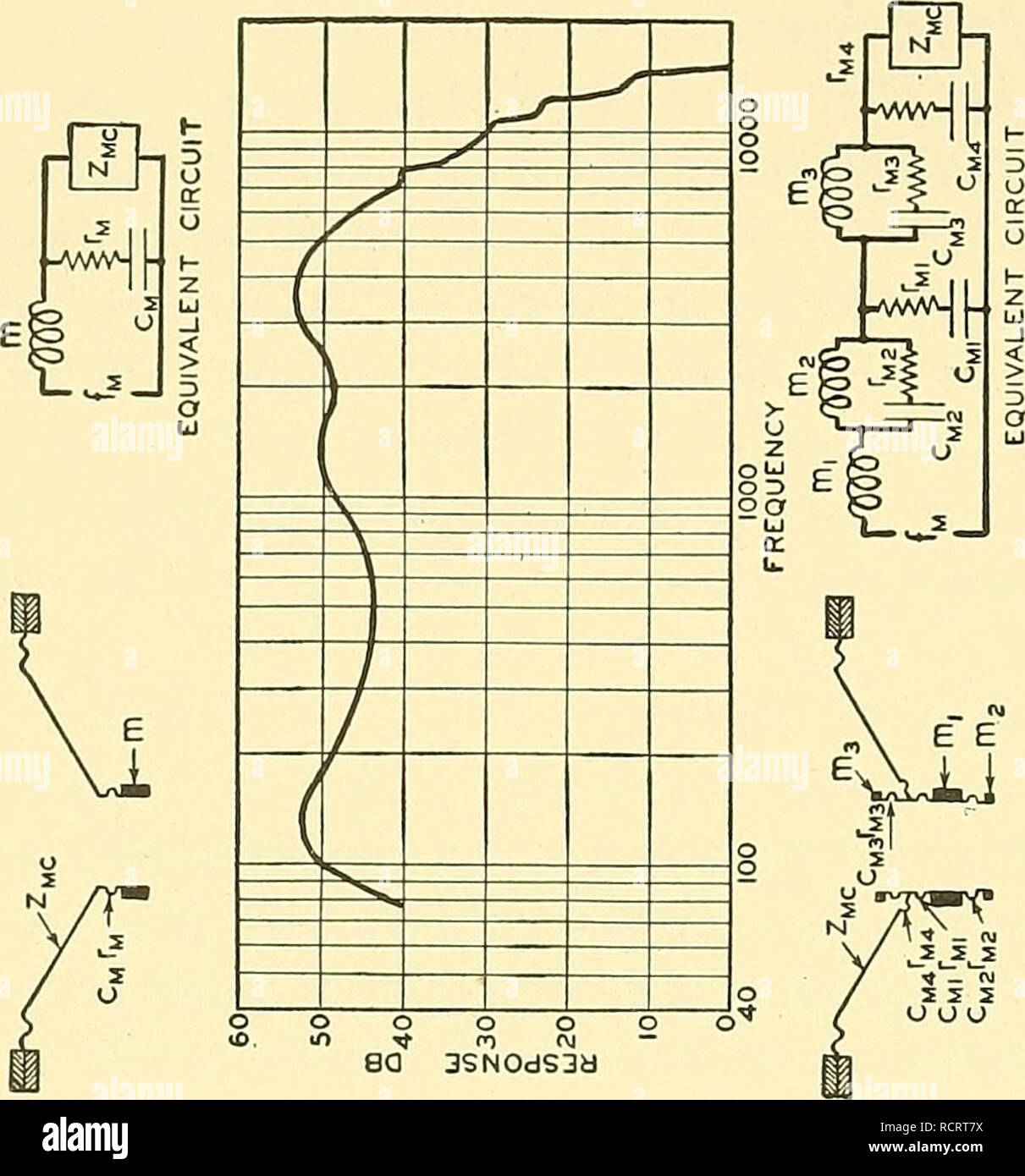
Diagrama, Dibujo de ingeniería

Descripción generada automáticamente

Para bajas frecuencias y tubos cortos

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Analogía | Impedancia Mecánica | Impedancia Acústica Específica | Impedancia Acústica |
| General |  |  |  |
| Masa (tubo abierto) |  |  |  |
| Compliancia (tubo cerrado) |  |  |  |
| Resistencia (material absorbente en el tubo) |  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Forma, Gráfico circular  Descripción generada automáticamente | Diagrama, Esquemático  Descripción generada automáticamente |



## Tubo con Terminación de Impedancia

Consideremos un tubo con terminación de impedancia acústica específica arbitraria

Esta impedancia acústica específica es conocida a priori. Tendremos igual que en el otro caso partir de la ecuación de onda

Tenemos dos condiciones de contorno, la primera está asociada con una fuente que emite ondas senoidales a una frecuencia fija

La segunda condición de contorno es una relación entre la presión sonora y la velocidad de partículas, la impedancia acústica específica, la cual es una función de la frecuencia

Usaremos la solución armónica, que contiene tanto ondas sonoras incidentes como reflejadas

Y la velocidad de partículas como se vio en el capítulo 1

La primera condición es

La segunda condición es

Tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas

Al resolver el sistema tenemos las constantes lo cual queda como **tarea**, recuerden usar recursos de internet, lo que es necesario es que interpreten los resultados.

El objetivo de esta parte de la materia es determinar los criterios de resonancia para tubos con impedancia acústica específica, compleja cuando y . Recordemos que el principal y más general criterio de resonancia es que la parte imaginaria de la impedancia acústica específica de entrada sea nula

Juntamos con la condición de impedancia acústica específica de terminación

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, sin embargo, si consideramos como una sola variable la razón tenemos dos ecuaciones y dos variables (Debemos notar que es el coeficiente de reflexión de presión sonora complejo)

Tomamos la segunda ecuación

Si remplazamos en la primera ecuación

Recordando que

Tenemos una expresión para la impedancia acústica específica de entrada en función de la impedancia acústica específica de terminación, estamos en condiciones de determinar las frecuencias de resonancia

Caso 1 tubo abierto

Caso 1 tubo cerrado

Una impedancia ni nula ni infinita implica

Si decimos que el criterio implica resolver la ecuación trascendental

Es una ecuación cuadrática si

Para diversos valores de , sin embargo, es posible que alguno de los valores de no tengan sentido. Las otras frecuencias se calculan usando

## Ejercicio:

Consideremos un tubo con terminación de impedancia acústica específica arbitraria en que en posee una presión sonora . Determine la presión sonora dentro del tubo y las frecuencias de resonancia si existen y las condiciones para su existencia

## Primera condición de contorno

## Segunda condición de contorno

## Sistema de ecuaciones

Usamos la primera ecuación

La reemplazamos en la segunda

Calculamos

## Usamos la solución armónica

## Determinamos el módulo

Supongamos que el tubo tiene longitud y estamos a una frecuencia graficaremos la distribución de la presión sonora y la compararemos con tubo abierto y cerrado teóricos

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Un dibujo de un barco

Descripción generada automáticamente con confianza baja

Vemos que para impedancias como no hay nodos, pero si hay mínimos de presión.

## Resonancia

Esto nos da una resonancia pero debemos pensar en una solución como el gráfico

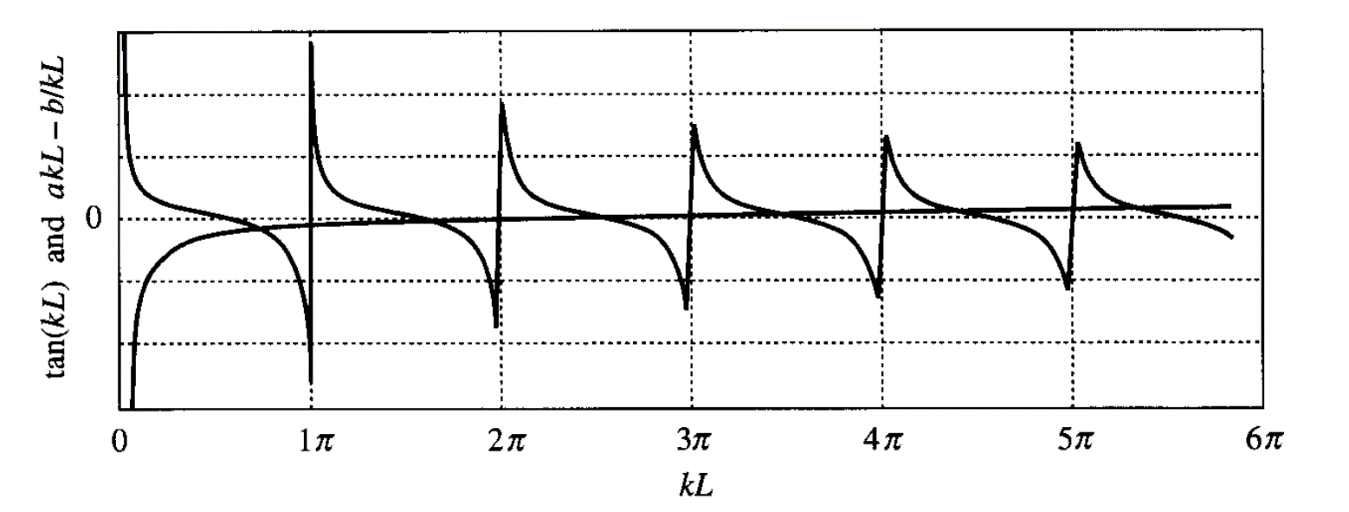
Mapa de colores

Descripción generada automáticamente con confianza baja

Vemos que las resonancias son cercanas al tubo cerrado (rojo), pero aparece una resonancia adicional en el punto azul.

Un material de impedancia más realista tiene un comportamiento de la forma dependiente de la frecuencia

El problema de la resonancia es mucho más complicado y se hace necesario trabajar con métodos numéricos para determinar las frecuencias donde la parte imaginaria de la impedancia acústica de entrada se hace nula



## Determinación de la Impedancia Acústica Específica Mediante Métodos Experimentales

A partir del problema de las ondas estacionarias y de reescribir nuestra solución armónica como

Y remplazando en la condición de Robin

Podemos asumir que y *,* es decir el primero es real y el segundo es complejo. En términos generales se denomina a esta fracción Relación de Onda Estacionaria

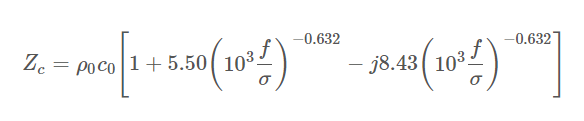
Donde es la presión máxima medida y es la presión mínima medida. La razón que corresponde al coeficiente de reflexión complejo y se puede obtener del *ROE*

Por otra parte, ubicando el primer mínimo de presión sonora, que corresponde al primer mínimo encontrado desde el final del tubo hacia atrás podemos determinar el ángulo de fase

Entonces al volver a la impedancia acústica específica de terminación

Supongamos que ROE = 2 y que el punto del primer nodo está ubicado a 5 cm del final de un tubo de 2 m a una frecuencia de 500 Hz

Debemos recordar que para materiales reales la impedancia acústica específica depende de la frecuencia por lo tanto estas mediciones deben ser para un conjunto de frecuencias que nos ayuden a caracterizar el material de manera completa. En el caso de materiales poroso y fibrosos se ha podido determinar una fórmula empírica Modelo Delany - Bazley – Miky



Donde es la frecuencia y es la resistividad de flujo específica

## Ejercicio:

Un tubo de longitud dentro del cual hay sonido a una cierta frecuencia tiene una terminación de impedancia asociada a una cavidad

Donde es la sección transversal del tubo es el volumen de la cavidad. Determine de forma analítica la frecuencia de resonancia cuando la longitud de onda es mucho mayor que la longitud del tubo.

Usamos la condición general de resonancia

Nos damos cuenta que

La longitud de onda es mucho mayor que la longitud del tubo, lo que quiere decir que la frecuencia es baja

Si el tubo tiene una longitud de , el área de la sección transversal es y el volumen V = determinar la frecuencia de resonancia

Gráficamente usando OCTAVE veremos para que valores se cumple