# Ecuaciones Diferenciales

# SERIES DE FOURIER

## Funciones Ortogonales

### Producto Interno

Pensemos en dos vectores en un espacio tridimensional

El segundo vector

El producto interno se define en este caso

En el caso que tengamos N dimensiones el producto interno es

Esta es una forma muy operacional de definir un producto interno. Otra manera más general de definir un producto interno es la siguiente si , donde V es un espacio vectorial. El producto interno se define como una aplicación que va desde y debe cumplir con

* Debe ser conmutativo
* Debe ser distributivo
* Si se debe cumplir esta propiedad
* Si
* Si

### Producto Interno de Funciones

El producto interno de funciones en un espacio vectorial de funciones definidas en un intervalo cerrado donde las funciones y, se define como

* Tarea 01 comprobar que es producto interno

### Ortogonalidad en el Producto Interno de Funciones

Se dice que dos vectores son ortogonales si su producto interno es nulo

En el caso de dos funciones se debe cumplir

Como ejemplo podemos citar las funciones y en el intervalo

Se define un conjunto ortogonal de funciones es ortogonal en el intervalo cerrado si para

Se define norma de una función como

Un conjunto de funciones es ortonormal si

Entonces un conjunto ortogonal puede ser ortonormalizado si

Como ejemplo comprobaremos la ortogonalidad del conjunto de funciones

En el intervalo . Después ortonormalizaremos este conjunto

Lo primero es realizar el producto interno

Por otra parte, debemos calcular

Hemos comprobado que el conjunto es ortogonal, ahora debemos normalizarlo

Finalmente, el conjunto ortonormal es

Este es un espacio vectorial de dimensión infinita y al estar ortonormalizados garantizan que constituyen una base

## Expansión de una Función en una Serie de Funciones Ortogonales (Ortonormales)

Un conjunto de funciones ortogonales (ortonormales) es ortogonal en el intervalo cerrado es capaz de representar una función , como una combinación lineal de la forma (recordemos que si son ortogonales son funciones linealmente independientes)

A fin de calcular los coeficientes debemos realizar el siguiente producto interno

Como el conjunto de funciones es ortogonal

El único término no nulo es

Entonces todos los coeficientes se pueden calcular a partir de

Tarea

Tenemos el siguiente conjunto de funciones ortogonales definidas en el intervalo el cual es

Determinar si es un conjunto ortogonal y ortonormalizar. En la práctica calcular

## Series de Fourier

Si es una función periódica de período , donde , en el intervalo simétrico entonces

Y la función se puede expresar como la sumatoria

Donde

Usando los resultados de las tareas del 02 de agosto 2021,la demostración de esto es simple A continuación realizaremos un par de ejemplos

**Ejemplo 01**

Calculamos primero el coeficiente

Continuamos con

Finalizamos con

Resumiendo

**Ejemplo 02**

Determinamos el valor

Primera parte

Segunda parte

Tercera parte





O bien

**Ejemplo 03**

Calcular los coeficientes de la Serie de Fourier para la función en el intervalo

Finalmente tenemos





## Series de Fourier para Funciones Pares e Impares

Una función es llamada función par si mientras que una función es llamada impar si se cumple que . Un ejemplo de función para es y de una función impar es

Función Par / Simétrica

Función Impar / Antisimétrica

Si la función es par o simétrica

Si la función es impar o antisimétrica



## Series de Fourier Compleja

La Serie de Fourier Compleja no es en realidad un concepto completamente nuevo que no tienen nada que ver la Serie de Fourier normal

La idea es expresar estos resultados con coeficientes complejos que nos permiten extender el concepto de Serie de Fourier. Al final de este punto realizaremos una reflexión de todo lo que se ha visto no solamente en esta línea de cursos si no que en toda la carrera. Partamos con las identidades de Euler

Entonces

Remplazamos en la serie normal

Ordenamos y factorizamos por y

Nombraremos los coeficientes como

Como se pueden dar cuenta son complejos conjugados

Continuemos con

Juntamos las dos integrales y factorizamos

Trabajaremos

Factorizamos, juntamos las integrales y ordenamos

Volvamos a la Serie de Fourier Compleja

Separamos las sumatorias

Como los coeficientes y son complejos conjugados

Entonces invirtiendo el orden de la primera sumatoria

Como todo es lo mismo podemos escribir finalmente

Donde

Para o bien

Las ventajas son muy grandes, primero solamente usamos una integral para calcular todos los coeficientes. Obtenemos para cada coeficiente parámetros físicos importantes como la amplitud y la fase

Antes habíamos hablado de que la función era periódica de período entonces la frecuencia fundamental o primer armónico es dado por

La primera frecuencia natural angular es

Entonces la Serie de Fourier Compleja puede ser reescrita como

Sus coeficientes pueden ser reescritos como

Donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Resignificaremos algunas cosas asociadas a los coeficientes, amplitud, fase (radianes) y podemnos obtener el retardo de tiempo

Ejemplo

Debemos tener en cuenta que el período es . Calculamos los coeficientes

El módulo