

Primera Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2010

1. Determine cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera lo demuestra y en caso de ser falsa muestra un contraejemplo.
 - (a) La suma de los primeros n números naturales es el semi-producto entre n y su sucesor.
 - (b) La suma de un número natural y su cuadrado es un número par.
 - (c) La suma de los primeros n números impares es igual al n -ésimo cuadrado.
 - (d) El número $n^2 + n + 1$ es un número primo independiente del valor que pueda $n \in \mathbb{N}$.
 - (e) Un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.
 - (f) Si en una fiesta hay n personas y todos se saludan entre si una sola vez entonces en total hay $\frac{n(n-1)}{2}$ saludos.
 - (g) El número 9 divide a $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.
 - (h) El número 3 divide a $7^n - 4^n$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.
 - (i) Si x es positivo entonces $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

2. Use el símbolo \sum para abreviar las sumas que aparecen y resuelva los problemas.

(a) Calcule el valor de la suma de los primeros n cuadrados.

(b) Calcule la suma de los primeros n números pares.

(c) Calcule

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110}$$

(d) Calcule

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^n$$

(e) Calcule la suma de los primeros n cubos.

(f) Calcule

$$1+1+x+1+x+x^2+1+x+x^2+x^3+1+x+x^2+x^3+x^4+1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$$

(g) Un jardinero, Don Ramón, tiene que regar 10 árboles que están dispuestos en una hilera separados entre sí por $6m$, Don Ramón regará los árboles con un balde que llenará de una llave que está a $10m$ del primer árbol. Determine cuánto camina Don Ramón después de regar el último árbol.

(h) El abuelo de Carlos le ofrece: *mire Carlitos hoy le daré 500 bolitas, mañana 1000 bolitas, pasado mañana 1500 bolitas, al otro día 2000 bolitas y así sucesivamente 500 bolitas más que el día anterior por dos años, o bien si tu prefieres hoy te doy una bolita, mañana 2 bolitas, pasado 4 bolitas, al otro día 8 bolitas u así sucesivamente el doble de bolitas que el día anterior por un mes. Bien Carlitos, ¿qué prefieres? Si tu fueses Carlos, ¿cuál de las opciones tomarías?*

(i) Dos trenes viajan por la misma línea férrea a $40km/h$ uno en dirección opuesta al otro, cuando los separan $100km$, de uno de los trenes sale un juguete volador electrónico a una velocidad de $80km/h$, cuando llega al tren opuesto se devuelve, cuando llega al primero se devuelve al segundo y así sucesivamente hasta que rompe en el choque de los trenes. ¿Qué distancia ha recorrido el juguete cuando llega por centésima vez al primer tren?