

Tercera Guía de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2010-2011

1. Calcule los siguientes límites:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$$

2. Calcule las siguientes primitivas:

a)

$$\int \ln(x)$$

b)

$$\int \operatorname{Arctg}(x)$$

c)

$$\int \sec(x)$$

d)

$$\int \sec^3(x)$$

e)

$$\int \operatorname{tg}(x)$$

f)

$$\int \operatorname{cotg}(x)$$

g)

$$\int \operatorname{cosec}(x)$$

h)

$$\int e^x \operatorname{sen}(2x)$$

i)

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$$

j)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

<p>k) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$</p>	<p>n) $\int \frac{x}{x^2+x+1}$</p>
<p>l) $\int \frac{1}{x \ln(x)}$</p>	<p>\tilde{n}) $\int \sqrt{1+4x^2}$</p>
<p>m) $\int \frac{1}{4+x^2}$</p>	<p>o) $\int \frac{1}{1-\cos(x)}$</p>

3. Pruebe que si a y b son números positivos distintos de 1, se tiene que $\log_a(b^x) = x \log_a(b)$ para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$.

4. Grafique las siguientes funciones:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3^x$.
- b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (0,5)^x$.
- c) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_{10}(x)$.
- d) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_2(x)$.
- e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \exp(-x^2)$.

5. ¿Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = \ln(x)$? ¿Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = x$?
¿Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \ln(x)$?

6. ¿Es cierto que para cualquier $x \geq 0$ se tiene que $e^x - 1 \leq xe^x$?

7. Las funciones $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ se llaman el *coseno hiperbólico* y el *seno hiperbólico* respectivamente.

- a) Muestre que $\sinh'(x) = \cosh(x)$ y que $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
- b) Muestre que \cosh es par y \sinh impar.
- c) Muestre que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
- d) Grafique \cosh y \sinh .

8. Demuestra que si $n \neq 1$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$$

9. Calcule la longitud de la curva $y = x\sqrt{x}$, para $x \in [0, 1]$.

10. ¿Cuál es el volumen de un cono de radio r y altura h ?
11. Calcule el volumen del sólido que resulta al girar en torno al eje Y la curva $y = x^2$, para $x \in [0, 1]$.
12. Calcule la longitud de la curva $y = x^2$, para $x \in [0, 1]$
13. Calcule el volumen de la esfera.
14. Calcule la longitud de la curva $y = \cosh(x)$, para $x \in [-1, 1]$
15. Calcule el volumen del sólido que resulta al girar la curva

$$y = \frac{3}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}},$$

en torno al eje X entre $x = 0$ y $x = 1$.

16. Calcule las siguientes integrales:

(a)

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

(b)

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2} dx$$

(c)

$$\int \frac{1+e^x}{(1-e^x)} dx$$

(d)

$$\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1} dx$$

(e)

$$\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1} dx$$

(f)

$$\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1} dx$$

(g)

$$\int_0^1 \frac{1}{s^4+1} ds.$$

(h)

$$\int \frac{2x + 1}{x^3 + 5x^2 + 6x} dx$$

(i)

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx$$

(j)

$$\int \frac{1}{y(y - P)} dy \quad , \text{ para cualquier } P \text{ constante.}$$

17. Considere el vector $u = (2, -3)$, grafique el conjunto

$$\{v \in \mathbb{R}^2 / u \cdot v = 0\}.$$

18. Considere el conjunto $L = \{(2t, -3t) / t \in \mathbb{R}\}$, grafique el conjunto

$$\{v \in \mathbb{R}^2 / u \cdot v = 0 \quad \forall u \in L\}.$$

19. Pruebe que $w' \in L_{v,w}$ si y solamente si $L_{v,w} = L_{v,w'}$.

20. Muestre que en \mathbb{R}^3 si $L \cap L' = \emptyset$ no implica que las rectas L y L' son paralelas.

21. Considere los planos $\Pi = \{(1, 2, 3) + \lambda(2, 3, 0) + \eta(0, 0, 1) / \lambda, \eta \in \mathbb{R}\}$ y $\Pi' = \{(1, 1, 1) + \lambda(0, 1, 0) + \eta(1, 1, 1) / \lambda, \eta \in \mathbb{R}\}$. Describa $\Pi \cap \Pi'$.

22. Encuentre la intersección entre $L_{(1,3),(1,2)}$ y

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 4 \end{cases}$$

23. Considere los siguientes planos

$$\Pi = \{(1, 0, 1) + \lambda(1, 1, -2) + \eta(-3, 2, -2) / \lambda, \eta \in \mathbb{R}\}$$

$$\Pi' = \{(x, y, z) / x + 2y - 5z = 21\}$$

(a) Encuentre $\Pi \cap \Pi'$.

(b) ¿Cuál de los dos planos está más cerca del punto $(1, 5, -7)$?

(c) Encuentre una recta que no interseccione al plano Π .

(d) Si L es la recta del literal c) encuentre $L \cap L'$, donde

$$L = \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 4 \\ z = -3t - 7 \end{cases}$$

(c) Encuentre un plano que contenga a las dos rectas del literal d)

24. Considere los planos

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x + 1 - z\}$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 2\}$$

$$E = \{\lambda(1, -1, 1) + \eta(1, 1, 0) + (1, 2, 1) / \lambda, \eta \in \mathbb{R}\}$$

Encuentre $C \cap D \cap E$.

25. Considere los planos

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 4y = 1\}$$

$$\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 2\}$$

$$\Pi'' = \{\lambda(1, 2, -1) + \eta(2, -1, 0) + (1, 1, 3) / \lambda, \eta \in \mathbb{R}\}$$

Describa $\Pi \cap \Pi' \cap \Pi''$.

26. ¿Los siguientes puntos: $P = (0, 1, 1)$, $Q = (1, 0, 1)$ y $R = (1, -1, 0)$ y $S = (2, 1, 3)$ pertenecen al mismo plano?

27. Considere el conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = x - 3\}.$$

¿Es C una recta?. Encuentre la intersección entre C y la recta

$$L = \{\lambda(1, 0, 1) + (1, -1, 2) / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$