Pauta Prueba 2 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 11 de Diciembre, 2010.

Tiempo: 120 minutos.

Nombre:

1. Resuelva los siguientes ejercicios.

(a) Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1}$$

Solución:

Notamos que cuando $x \longrightarrow 0$, se tiene que $\frac{2^x-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x-1}$ es una expresión del tipo $\frac{0}{0}$, luego podemos aplicar regla de L'Hopital y por tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1} &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2^x ln(2)}{\left(\frac{1}{2}\right) ln\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2^x ln(2)}{-\left(\frac{1}{2}\right)^x ln(2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2^x}{-\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= -1
\end{aligned}$$

(b) Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{\sqrt{\frac{k}{n}}}}{n} = 2$$

Solución:

Sea $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, $P_n=\left\{x_k=\frac{k}{n}:0\leq k\leq n\right\}$ partición regular del intervalo $[0,1]$ y $x_k^*=x_{k-1}$ entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{\sqrt{\frac{k}{n}}}}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k^*)(x_k-x_{k-1})$$

es una suma de Riemann. Como f es continua en $[0,1]$ se tiene que f es integrable en $[0,1]$. Luego

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{\sqrt{\frac{k}{n}}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k^*)(x_k-x_{k-1})=\int_0^1 f(x)dx$$

donde

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 xe^x dx$$

Para calcular esta última integral, utilizamos integración por partes con $u=x$ y $dv=e^x dx$ y se tiene que

$$\int_0^1 xe^x dx=xe^x|_0^1-\int_0^1 e^x dx=xe^x|_0^1-e^x|_0^1=1$$

Por tanto

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 xe^x dx=2$$

(c) Encuentre la familia de primitivas de

$$\int\frac{x^2-1}{x^3+3x}dx$$

Solución:

Notar que $x^3+3x=x(x^2+3)$ donde x^2+3 es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ entonces

$$\frac{x^2-1}{x^3+3x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

con A, B y C en $\mathbb{R}$. Resolviendo esta última igualdad para encontar A, B y C, se tiene que $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{4}{3}$ y $C=0$. Luego

$$\int\frac{x^2-1}{x^3+3x}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x}dx+\frac{4}{3}\int\frac{x}{x^2+3}dx$$

donde

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c_1$$

$$\int \frac{x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}ln|u| + c_2 = \frac{1}{2}ln(x^2+3) + c_2$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-1}{x^3+3x}dx &= -\frac{1}{3}(ln|x| + c_1) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}ln(x^2+3) + c_2\right) \\ &= -\frac{1}{3}ln|x| + \frac{2}{3}ln(x^2+3) + c \end{aligned}$$

2. Sea C un cuadrado cuyos vértices están ubicados en los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$. Divida el cuadrado C en dos regiones mediante un arco de la parábola $y = x^2$ que tiene punto inicial $(0,0)$ y punto terminal $(1,1)$. Denote por R_1 la región superior en C y R_2 la región inferior en C luego de la división.

   (a) Calcule el vólumen $V(R_1)$ del sólido de revolución obtenido al rotar la región R_1 en torno al eje x.

   <u>Solución:</u>

   El vólumen $V(R_1)$ está dado por la siguiente expresión

$$V(R_1) = \pi \int_0^1 (1^2 - (x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (1 - x^4)dx$$

   Calculando esta última integral se tiene que

$$V(R_1) = \pi \int_0^1 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi - \pi \frac{x^5}{5}|_0^1 = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

   (b) Escriba una expresión que permita calcular la longitud de la curva que encierra la región R_2.

   <u>Solución:</u>

La longitud de la curva que encierra la región R_2, está dada por la siguiente expresión

$$L(R_2) = \int_0^1 \sqrt{1+((x^2)')^2}dx + 2 = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx + 2$$

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 5 \\ 3x-y+z & = & 1 \end{array}$$

(a) Demuestre que la solución del sistema de ecuaciones representa una recta en el espacio. Determine un vector director de esta recta $\mathcal{L}$.

Solución:

Primero resolvemos el sistema de ecuaciones.
La matriz ampliada asociada a este sistema es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora haremos la operacion fila multiplicar la fila 2 por -3 y se la sumamos a la primera, $F_{12}(-3)$, así obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -14 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos multiplicar la fila 1 por $\frac{1}{2}$, $F_1\left(\frac{1}{2}\right)$, así

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sumando a la fila 2 la fila 1, $F_{21}(1)$, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego volviendo a las ecuaciones se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} y-z & = & -7 \\ x & = & -2 \end{array}$$

Así el conjunto solución del sistema es

$$\begin{aligned}
\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x=-2, y=-7+z\} &= \{(-2,-7+z,z)\,/\,z\in\mathbb{R}\}\\
&= \{z(0,1,1)+(-2,-7,0)\,/\,z\in\mathbb{R}\}\\
&= \{t(0,1,1)+(-2,-7,0)\,/\,t\in\mathbb{R}\}\\
&= \mathcal{L}
\end{aligned}$$

De la última igualdad, vemos que las soluciones del sistema son infinitas y dependen de solo un parámetro, que en este caso es z. Por lo tanto el conjunto anterior es una recta en el espacio y un vector director es $(0,1,1)$.

(b) Considere la recta $\mathcal{L}'$ con ecuaciones cartesianas

$$\frac{x+2}{3} = -y-4 = z-3$$

Calcule $\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'$, donde $\mathcal{L}$ es la recta de la parte (a).

<u>Solución:</u>

Para calcular la intersección escribiremos las ecuaciones parametricas de las rectas
para $\mathcal{L}$, $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
x &= -2\\
y &= t-7\\
z &= t
\end{aligned}$$

para $\mathcal{L}'$, $s\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
x &= 3s-2\\
y &= -s-4\\
z &= s+3
\end{aligned}$$

Ahora si hay intersección entonces exiten s,t de forma que :

$$\begin{aligned}
-2 &= 3s-2\\
t-7 &= -s-4\\
t &= s+3
\end{aligned}$$

Así $s = 0$, $t = 3$, luego

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{L}' = \{(-2, -4, 3)\}$$

(c) ¿Es $\mathcal{L}$ perpendicular a $\mathcal{L}'$?.

Solución:

Para ver si las rectas son perpendicualares debemos ver si el producto punto de sus vectores directores es 0 o no.
En este caso el vector director de $\mathcal{L}$ es $(0, 1, 1)$ y el vector director de $\mathcal{L}'$ es $(3, -1, 1)$, luego

$$(0, 1, 1) \cdot (3, -1, 1) = 0 - 1 + 1 = 0$$

Por lo tanto las rectas son perpendiculares.