Última Guía de Matemáticas 2.......Recargada

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2010-2011

1. **Ley de Enfriamiento de Newton:**

   Puede observarse que si se introduce un objeto caliente en un ambiente (grande comparado con el objeto) frío, *la razón a que el objeto se enfría es proporcional a la diferencia de la temperatura del objeto τ y la temperatura del ambiente T.* Modele este fenómeno (es decir, encuentre la temperatura del objeto $\tau(t)$ en cada instante t). Escriba una ecuación diferencial que modele este problema y resuélvalo en total generalidad.

2. **Ley de Hooke:**

   "La fuerza que un resorte ejerce sobre una masa adosada a él es directametne proporcional al desplazamiento de la masa, pero en sentido opuesto al movimiento". Muestre que la ecuación del movimiento es de la forma

   $$x'' = -w^2 x$$

   donde w es una constante. Muestre que cualquier función de la forma $A\operatorname{sen}(wt) + B\cos(wt)$ es solución de la ecuación.

3. **Péndulo Simple:**

   Considere una masa m que está colagada del techo de una habitación por un hilo de largo l. Desprecie el roce y la masa del hilo. Si se mueve un ángulo θ desde el punto de equilibrio, esta masa comenzará a oscilar. Muestre que la ecuación de movimiento del problema es de la forma

   $$\theta'' = -w^2 sen(\theta)$$

   donde w es una constante. Haciendo una aproximación de primer orden, es decir para ángulos pequeños $\operatorname{sen}(\theta) \approx \theta$, se tiene que la ecuación de movimiento es de la forma

   $$\theta'' = -w^2\theta,$$

   la misma que se obtiene según la Ley de Hooke.

4. **Ecuación Logística:**

   La siguiente ecuación diferencial $y' = py(M - y)$ se llama ecuación logística. Encuentre dos soluciones constanes de la ecuación logística. Interprete esas soluciones si es que la ecuación logística modela crecimientos poblacionales. Muestre que para pequeños valores de y la función y se comporta como una función exponencial. Resuelva la ecuación logística y comprube sus conjeturas. Grafique las soluciones. Interprete las constantes.

5. Una represa contiene actualmente 200 millones de galones de agua fluorada, que contiene 1600 libras de fluor. La solución fluye de la represa a un ritmo de 4 millones de galones por día y se reemplaza al mismo ritmo por agua pura. ¿Cuál es la cantidad de fluor existente en la represa en cada instante?. ¿Existe un momento donde la cantidad de fluor en la represa es cero?.

6. Una enfermedad contagiosa se propaga con una velocidad que depende proporcionalmente del producto entre la cantidad de gente infectada y de la no infectada.

   a) Escriba una ecuación diferencial que describa la situación del enunciado.

   b) Si la constante de proporcionalidad es 1, ¿Qué puede decir del desarrollo de la enfermedad al largo plazo, si el contagio comenzó a partir de una persona infectada?

7. Suponga que f es solución de

   $$y' + a(x)y = 0 \tag{1}$$

   donde $a(x)$ es una función real. Suponga además que g es solución de

   $$y' + a(x)y = b(x) \tag{2}$$

   donde $b(x)$ es una función real. Muestre que $f + g$ es solución de (2). Muestre que si h es solución de (2) entonces $g - h$ es solución de (1). Muestre que cualquier solución de (2), se puede escribir en la forma $f + g$ donde f es solución de(1) y g es una solución particular de (2).

8. Considere la ecuación

   $$y' + \frac{4y}{200 + t} = \frac{5}{2}. \tag{3}$$

   Muestre que $f(t) = \frac{1}{2}(200 + t)$ es una solución de (3). Resuelva en general el problema.

   $$y' + \frac{4y}{200 + t} = 0 \tag{4}$$

9. Resuelva el problema

$$y' - y = e^x \quad y(0) = 1$$

10. Resuelva el problema

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 3y \quad y(1) = 1$$

11. Resuelva el problema

$$\frac{dy}{dx} = 2(y-1)(y+2) \quad y(0) = 2$$

12. Resuelva el problema

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4 \quad y(0) = 2$$

13. Si f es solución del problema $y' + y = sen(x), \quad y(0) = 0$ encuentre todas las derivadas de f en 0.

14. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$xe^{-y} sen(x)dx - 2dy = 0$$

15. Grafique la función f tal que

$$f'(x) = \frac{-f}{1+x} \qquad \text{y} \;\; f(0) = 1$$

16. Si f es solución de $y' - y = 2$, entonces muestre que $e^x f(x)$ es solución de $y' - 2y = 2e^x$.

17. La dinámica de cierta población está modelada por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1,2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

   a) ¿Para qué valores de P la población crece?

   b) ¿Para qué valores de P la población decrece?

   c) Resuelva la ecuación.

18. Una solución de glucosa es administrada intravenosamente a razón constante r. Como la glucosa es asimilada, esta es convertida en otros elementos y removida del flujo sanguineo a una razón que es proporcional a la concentración de glucosa que hay en ese instante. Entonces un modelo de concentración de la solución de glucosa es:

$$C'(t) = r - kC(t) \quad \text{donde } k \text{ es una constante.}$$

   a) Suponga que la concentración en el instante $t = 0$ es C_0. Determine la concentración en cualquier instante t. (Ayuda: La integral $\displaystyle\int \frac{-kC'(t)dt}{r - kC(t)}$ tiene una forma bastante conocida.)

   b) Asuma que $C_0 < \frac{r}{k}$, encuentre $\lim\limits_{x\to\infty} C(t)$.

19. Sea $y(t)$ y $V(t)$ la altura y el volumen de un tanque de agua en el instante t. Si el agua comienza a caer por acción de la gravedad, por un orificio de área a en el fondo del tanque, entonces la ley de Torricelli dice que

$$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

   donde g es la aceleración de gravedad.

   a) Suponga que el tanque es cilíndrico de altura 180 *cm* y radio 30 *cm* y el orificio es circular de radio 1 *cm*. Escriba la ec. diferencial en y y resuélvala, suponiendo que al inicio el tanque estaba lleno de agua.

   b) ¿Cuanto tardará en vaciarse el tanque?

20. Sea $P(t)$ el nivel de desempeño de alguien aprendiendo alguna tarea en función del tiempo t de entrenamiento. EL gráfico de P le llaman *curva de aprendizaje.* Algunos psicólogos han propuesto el siguiente modelo para P

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P),$$

   donde k es una constante positiva. Grafique diferentes curvas de aprendizaje, para M fijo y modificando k, P_0.

21. Sea $a_0 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ¿Es (a_n) acotada? ¿Es creciente?¿Es convergente?

22. ¿Es cierto que si $a_n \to a$ entonces $cos(a_n) \to cos(a)$?

23. Encuentre un conjunto finito de términos de la sucesión $a_n = \dfrac{3n + \pi}{n}$, que contenga a todos los términos de la sucesión que están fuera del intervalo $(3 - 10^{-6}, 3 + 10^{-6})$.

24. Calcule el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{n+4}{3n-2}$.

b) $a_n = \frac{n^2+3n+4}{4n^3-2n+6}$.

c) $a_n = \frac{ln(n)}{n}$.

d) $a_n = \frac{sen(n)}{n}$.

e) $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

f) $a_n = \frac{3^n}{n!}$.

g) $a_n = \frac{ln(n^{-1})}{n}$.

h) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

i) $a_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$

j) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+2}$

25. En cierto modelo genético, el promedio de un gen perjudicial se relaciona con la serie infinita:

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} \quad \text{para } 0 < r < 1.$$

Pruebe que esta serie converge y encuentre su suma.

26. Pruebe que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

es una serie de términos positivos y convergente entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2$$

es convergente.

27. Sea (a_n) una sucesión de términos positivos tales que

$$\frac{1}{8} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{7}{8}$$

para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

converge.

28. A un paciente se le administra una inyección de 10 unidades de cierta medicina cada 24 horas. El paciente elimina el 20 % de la medicina que tiene en el cuerpo diaroiamente. Si la medicina supera el umbral de las 60 unidades en el cuerpo, la droga se vuelve peligrosa para el paciente. ¿El tratamiento se puede continuar indefinidamente sin riesgo para el paciente?

29. Decida cual(es) de las siguientes series converge(n).

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

h)
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

m)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$$

n)
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$$

ñ)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$$

o)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

p)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

q)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$$

30. Describa con un dibujo los siguientes conjuntos.

    a) $C = \{z \in \mathbb{C}/|z-2+i| = 2\}$
    b) $D = \{z \in \mathbb{C}/0 < |z| \leq 1\}$
    c) $A = \{z \in \mathbb{C}/0 < Arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$
    d) $A = \{z \in \mathbb{C}/1 \leq |z| \leq 2\}$
    e) $T = \{z \in \mathbb{C}/\frac{1}{10} \leq |z| \leq 4, Im(z) \geq 0\}$
    f) $L = \{z \in \mathbb{C}/Re(z) + Im(z) = 5\}$
    g) $I = \{z \in \mathbb{C}/z^{-1} \in D\}$, donde D es del literal b).
    h) $E = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| + |z+1| = 4\}$
    i) $C = \{z \in \mathbb{C}/z^2 \in S^1\}$
    j) $F = \{z \in \mathbb{C}/-1 < Re(z) < 1\}$
    k) $C = \{z \in \mathbb{C}/Im(\bar{z}) < 0\}$

31. Calcule:

    a) i^{1003}
    b) $(-i)^{1003}$
    c) $(-1+i)^{1004}$
    d) $(\sqrt{3}+i)^{600}$
    e) $(-3+i\sqrt{3})^{300}$
    f) $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{40}$

32. Encuentre todas las $n-$ésimas raíces de z, donde n y z son dados en cada caso.

    a) $z = 1+i,\ n = 6$
    b) $z = i,\ n = 5$
    c) $z = -1,\ n = 4$
    d) $z = \sqrt{3}+i,\ n = 3$
    e) $z = 10,\ n = 4$
    f) $z = -6,\ n = 2$

33. ¿Cuáles son los números complejos que son iguales a su conjugado?

34. Elija $z \in \mathbb{C}$, cualquiera, grafique z, $-z$, $\bar{z}$, $-\bar{z}$, $2z$, z^2 y z^{-1}.

35. Si ζ es una raíz de la unidad, muestre que ζ está en S^1.¿Es cierto que todo elemento de S^1 es uan raíz de la unidad?

36. Considere la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \bar{z}$, describa esta función geométricamente.

37. Considere un número complejo de norma 1, digamos $w = cos(\theta) + isen(\theta)$, considere la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = wz$. Describa esta función geométricamente.

38. Pruebe que si $z \in \mathbb{C}$ satisface $z^2 + z + 1 = 0$, entonces z es una raíz cúbica de la unidad. Describa a z en su forma polar y cartesiana.

39. Pruebe que si $z \in \mathbb{C}$ satisface $z^6 + z^3 + 1 = 0$, entonces z es una raíz novena de la unidad. Describa a z en su forma polar y cartesiana.

40. Un dodecágono regular se inscribe en la circunsferencia de radio 1 y centro en el origen, de forma tal que uno de sus vértices es 1. ¿Cuántos de los vértices del dodecágono son raíces cuartas de la unidad? ¿y raíces sextas de la unidad?

41. Sea $\xi \neq 1$ una raíz $n-$ésima de la unidad, entonces pruebe que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi^k = 0$$

42. ¿Es cierto que si $\zeta^n = 1$ entonces su conjugado satisface la misma relación? ¿es cierto que su inverso multiplicativo también satisface la misma relación?

43. ¿Es cierto que $|z + w| \leq |z| + |w|$?

44. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales, y sea z un número complejo que es raíz de $p(x)$, verifique entonces que $\bar{z}$ es también una raíz de $p(x)$.

45. Pruebe que todo elemento de $\mathbb{C}$ es un cuadrado en $\mathbb{C}$.

46. Si ζ satisface la ecuación $x^{11} + 1 = 0$ y $\zeta \neq -1$, entonces pruebe que

$$\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \zeta^k = 0$$

47. Grafique las sextas potencias de -64.

48. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$. Demuestre que $z^{-1} = \bar{z}$.

49. Muestre que $\zeta = cos(2\pi\theta) + isen(2\pi\theta)$ es un elemento de norma 1. Muestre que si $\theta \in \mathbb{Q}$ entonces ζ es raíz de la unidad.

50. Sea $\zeta \in S^1$, describa la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \zeta \cdot z$.