

Primera Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2011

1. Determine cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera lo demuestra y en caso de ser falsa muestra un contraejemplo.
 - (a) La suma de los primeros n números naturales es el semi-producto entre n y su sucesor.
 - (b) La suma de un número natural y su cuadrado es un número par.
 - (c) La suma de los primeros n números impares es igual al n -ésimo cuadrado.
 - (d) El número $n^2 + n + 1$ es un número primo independiente del valor que pueda $n \in \mathbb{N}$.
 - (e) Un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.
 - (f) Si en una fiesta hay n personas y todos se saludan entre si una sola vez entonces en total hay $\frac{n(n-1)}{2}$ saludos.
 - (g) El número 9 divide a $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.
 - (h) El número 3 divide a $7^n - 4^n$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.
2. Encuentre la suma $S = 1 + 11 + 111 + \dots + 11 \dots 1$, donde el último término del sumando consiste de n unos.

3. Calcule el valor de la siguiente suma

$$S = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{n}{10^n}$$

4. Demuestre que $2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9.

5. Considere la colección de números definida por $a_1 = 5$, $a_2 = 11$ y $a_{n+1} = 7a_n - 12a_{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3^{n+1} - 4^n$.

6. Use el símbolo \sum para abreviar las sumas que aparecen y resuelva los problemas.

(a) Calcule el valor de la suma de los primeros n cuadrados.

(b) Calcule la suma de los primeros n números pares.

(c) Calcule

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110}$$

(d) Calcule

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^n$$

(e) Calcule la suma de los primeros n cubos.

(f) Calcule

$$1+1+x+1+x+x^2+1+x+x^2+x^3+1+x+x^2+x^3+x^4+1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$$

(g) Un jardinero, Don Ramón, tiene que regar 10 árboles que están dispuestos en una hilera separados entre sí por $6m$, Don Ramón regará los árboles con un balde que llenará de una llave que está a $10m$ del primer árbol. Determine cuánto camina Don Ramón después de regar el último árbol.