

# Segunda Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2011

1. Demuestre usando inducción que

$$(a) 2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$$

$$(b) 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$(c) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n - 1) \cdot (2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$$

$$(d) \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{1}{(-4)^n} \right]$$

(e) Los números de la forma  $3^{2n} - 1$  son divisibles por 8

(f) Los números de la forma  $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$  son divisibles por 54

2. Conjeture fórmulas para las siguientes expresiones y luego demuéstrelas usando inducción.

$$(a) (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^2^2) \cdots (1 + x^{2^n})$$

$$(b) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

3. Pruebe que

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdots (n + p - 1)$$

es divisible por  $p$ , para cualquier valor de  $n \in \mathbb{N}$ .

4. Determine si cada una de las siguientes sumas son verdaderas o falsas.

(a)

$$\sum_{n=0}^{100} (n+1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{100} k^3 = \left( \sum_{k=1}^{100} k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^{100} k \right)$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 + \sum_{k=1}^{100} k$$

(d)

$$\sum_{k=0}^{100} 2 = 200$$

5. Calcule las siguientes sumas.

(a)

$$\sum_{k=2}^n \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^n \frac{3}{k^2 + 5k + 6}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$$

6. Demuestre las siguientes igualdades usando las propiedades de las sumatorias.

(a)

$$\sum_{k=1}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

(b)

$$\sum_{k=1}^n kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2} [1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}], r \neq 1$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 = (n+1)(2n+1)$$

(d)

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k}{1+k^2+k^4} = 1 - \frac{1}{1+n+n^2}$$

7. Calcule el valor de las siguientes sumas.

(a)

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k 7^i$$

(b)

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k 7^k$$

(c)

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k 7^n$$

(d)

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=2}^n (k+2i)$$

(e)

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^n \left( \frac{2^j}{3^k} \right)$$

(f)

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^7 (2i^2k - 20)$$