Binomio de Newton

1 Teorema del binomio de Newton

Teorema: *Sean* a, b *dos números reales no nulos, y sea* $n \in \mathbf{N}$ *un número natural. Entonces:*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots \\ &\qquad \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n\end{aligned}$$

La expresión a la derecha se denomina el **desarrollo binomial** de $(a+b)^n$. Observamos que este desarrollo tiene $n+1$ términos.

Denotamos por $T_k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ al k-ésimo término del desarrollo binomial.

Al coeficiente $\binom{n}{k}$ lo llamamos el **k-ésimo coeficiente binomial** de $(a+b)^n$.

Comprobemos este teorema para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$.

$\underline{n = 1}$: Es claro que $(a+b)^1 = a + b$.

Por otra parte: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$.

$\underline{n = 2}$: Sabemos que: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Por otra parte:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k &= \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

$\underline{n=3}$: Sabemos que: $\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3.$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k &= \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}$$

$\underline{n=4}$: Sabemos que: $\quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k &= \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^4 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b^1 + \binom{4}{4} b^4 \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

Con esto hemos comprobado el teorema para $n = 1, 2, 3, 4$.
Una demostración del teorema del binomio se puede hacer por inducción.

2 Los coeficientes binomiales y triángulo de Pascal

Los coeficientes binomiales los podemos distribuir de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \leftarrow a+b \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \leftarrow (a+b)^2 \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \leftarrow (a+b)^3 \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \leftarrow (a+b)^4 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . &
\end{array}$$

Si reemplazamos estos coeficientos binomiales por sus respectivos valores obtenemos el llamado **Triángulo de Pascal**:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & & \leftarrow a+b \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \leftarrow (a+b)^2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \leftarrow (a+b)^3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \leftarrow (a+b)^4 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Observamos que cada coeficiente en el triángulo de Pascal es la suma de los dos que tiene inmediatamente encima.

Esto corresponde a la siguiente propiedad ya conocida de los coeficientes binomiales:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

3 Ejercicios sobre factoriales

1. Si $n > 2$, demuestre que $(n^2 - n) \cdot (n-2)! = n!$
2. Si $n \geq k$, demuestre que $(n - k + 1) \cdot n! + k \cdot n! = (n+1)!$
3. Si $n > 2$, demuestre que $n! - (n-1)! = (n-1)^2 \cdot (n-2)!$
4. Determine todos los $n \in \mathbf{N}$ para los cuales $(2n)! = 2 \cdot n!$
5. Determine todos los pares de enteros positivos m y n de manera que $(m+n)! = m! \cdot n!$
6. Resuelva la ecuación para n entero positivo $(n+2)! = 90 \cdot n!$
7. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Demuestre o de un contraejemplo si es el caso.

   $(n+n)! = n! + m!$; $\quad (2n)! = 2n!$; $\quad$ y $\quad (mn)! = m!n!$

4 Ejercicios sobre coeficientes binomiales

1. Las siguientes son propiedades de los coeficientes binomiales que deben entenderse conceptualmente.

   $$\binom{n}{0} = 1; \qquad \binom{n}{1} = n; \qquad \binom{n}{n-1} = n; \qquad \binom{n}{n} = 1$$

   $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

   $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

2. Si $0 \leq k \leq n-2$, entonces

   $$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

   Este ejercicio, junto con demostrarse, debe entenderse conceptualmente.

3. $\binom{m}{n+1} = \frac{m-n}{n+1}\binom{m}{n}$

4. $\binom{m+1}{n+1} = \frac{m+1}{n+1}\binom{m}{n}$

5. Determinar números naturales a y b de modo que

$$n^3 = 6\binom{n}{3} + a\binom{n}{2} + b\binom{n}{1} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

6. Escriba

$$6\left[\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right]$$

como polinomio en n, utilice el hecho que $\binom{n}{r}$ es siempre un número natural, y pruebe que $n(n^2+5)$ es múltiplo de 6 para todo $n \in \mathbf{N}$.

7. Demuestre por inducción matemática que para cualquier $s \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{s+i}{i} = \binom{s+n+1}{s+1}$$

5 Binomio de Newton

1. Determine el coeficiente del término independiente de x en el desarrollo binomial de $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x})^6$.

2. Dada la potencia $(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}})^4$, encuentre los términos de la expansión binomial en los cuales los exponentes de y sean números naturales.

3. Determine una relación entre a y n de modo que en el desarrollo de $(1+a)^n$ aparezcan dos términos consecutivos iguales.

4. Pruebe que $(2+\sqrt{m})^n + (2-\sqrt{m})^n \in \mathbf{N}$ para todos $m, n \in \mathbf{N}$.

5. Pruebe que $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

6. Calcule $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}$.

7. Determine la suma de todos los coeficientes del polinomio respecto de x que resulta de la expansión binomial de $(3x-4)^17$.

8. Usando el triángulo de Pascal encuentre el desarrollo binomial de $(x+y)^7$.

9. Encuentra el coeficiente de x^{31} en el desarrollo binomial de $\left(\frac{2x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)^{20}$.

10. Encuentra el término central de en el desarrollo binomial de $(\sqrt{2} - 3\sqrt{a}b^2)^{14}$.

6 Trinomio de Newton. Generalizando.

1. Si n es un número natural, y n_1, n_2, n_3 son números enteros tales que $0 \leq n_i,\ \ i = 1, 2, 3$ y $n_1 + n_2 + n_3 = n$, definamos

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}.$$

La siguiente fórmula (Teorema del trinomio) generaliza el Teorema de binomio.

$$(a+b+c)^n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1, n_2, n_3} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3}$$

Por ejemplo, para $n = 3$ esta fórmula se escribe:

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^3 &= \textstyle\sum_{n_1+n_2+n_3=3} \binom{3}{n_1, n_2, n_3} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} \\
&= \binom{3}{3,0,0} a^3 + \binom{3}{0,3,0} b^3 + \binom{3}{0,0,3} c^3 + ... \\
&\quad ... + \binom{3}{2,1,0} a^2 b + \binom{3}{2,0,1} a^2 c + \binom{3}{1,2,0} ab^3 + ... \\
&\quad ... + \binom{3}{0,2,1} b^2 c + \binom{3}{1,0,2} ac^2 + \binom{3}{0,1,2} bc^2 + ... \\
&\quad ... + \binom{3}{1,1,1} abc
\end{aligned}$$

Pruebe esta fórmula para $n = 2$, y $n = 3$.

2. Usando la fórmula del trinomio, calcule
$(x^2 - x + 1)^4$; $\quad (a + 2ab + b)^2$; $\quad (1 + \sqrt{2} + 2)^3$

3. Desarrolle la potencia $(a^2 + 2ab + b^2)^2$ con el desarrollo del trinomio.

   Luego desarrolle $(a+b)^4$ por teorema del binomio, y compare coeficientes. ¿Qué puede concluir?

4. En caso de existir, obtenga el coeficiente de x^7 en el desarrollo trinomial de $(\frac{2}{x^3} + x + x^3)^8$

5. Obtenga el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $(1 + x^2 - x^3)^9$.

7 Combinatoria. Repasando.

1. ¿De cuántas formas puede extraer 3 elementos del conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$?

   Escriba todos estos tríos.

   Observe que estos son todos los subconjuntos de 3 elementos de A.

¿Cuántos subconjuntos tiene A?

Pruebe que A tiene tantos subconjuntos de 3 elementos, como subconjuntos de 2 elementos.

2. Considere el conjunto A del ejercicio anterior.

   ¿Cuántas 3-tuplas ordenadas se puede construir con los elementos del conjunto A? Escríbalas todas.

   ¿Cuántas 2-tuplas ordenadas se puede construir con los elementos del conjunto A? Escríbalas todas.

   Alicia tiene 5 camisas, dos de ellas las enviará al lavado, y las otras 3 las pondrá una encima de la otra en su armario. ¿Cuántas son las posibilidades en que podremos encontrar ordenadas las 3 camisas que quedaron para guardar?