Contando

1 Contando

1. n **factorial:** $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$

   $0! = 1$ por definición

   (a) ¿De cuántas formas se puede ordenar 2 objetos, 3 objetos, ..., n objetos?

   (b) Pedro tiene 4 camisas que va a guardar en el closet en una pila hacia arriba. ¿De cuántas formas pueden quedar ordenadas?

   (c) Un curso tiene 60 estudiantes. Se va a hacer una lista del curso por orden en que llegan el primer día de clases. ¿De cuántas formas distintas puede quedar la lista?

   (d) En un juego de azar con tarjetas que se organiza para una fiesta escolar, cada tarjeta viene con los dígitos del 1 al 6, ordenados de alguna forma. No hay dos tarjetas con el mismo orden.

   Para el día del sorteo se tiene una bolsa con 6 bolitas, cada una de ellas con un dígito del 1 al 6, todas distintas. Se va sacando una a una las bolitas, lo que establece un orden para estos dígitos, el orden ganador.

   Gana quien tenga la tarjeta con el orden ganador.

   ¿Cuántas tarjetas tiene este juego?

   (e) ¿Cuántos números de 9 cifras distintas dos a dos, se puede formar con los dígitos $1, 2, 3, 4, \cdots, 9$?

   (f) Un mazo de naipes tiene 52 naipes. ¿De cuántas formas distintas pueden quedar ordenados los naipes en un mazo.

2. $P(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)$ **donde** $0 \leq k < n$

   (a) ¿De cuántas formas se puede ordenar k objetos de una colección de n elementos?

   (b) Pedro tiene 5 camisas. De ellas, va a guardar 4 en el closet en una pila hacia arriba. ¿De cuántas formas pueden quedar ordenadas estas 4 camisas?

   (c) Un curso tiene 60 estudiantes. Se va a hacer una lista del curso por orden en que llegan el primer día de clases. Ese día llegaron sólo 55 de los 60 estudiantes. ¿De cuántas formas distintas puede quedar la lista de los 55 que llegaron?

(d) En un juego de azar con tarjetas que se organiza para una fiesta escolar, cada tarjeta viene con los dígitos del 1 al 6, ordenados de alguna forma. No hay dos tarjetas con el mismo orden.

Para el día del sorteo se tiene una bolsa con 9 bolitas, cada una de ellas con un dígito del 1 al 9, todas distintas. Se saca 6 bolitas, una a una, desde la bolsa, lo que establece un orden para 6 dígitos, el orden ganador.

Gana quien tenga la tarjeta con los dígitos del 1 al 6 en el orden ganador.

¿Cuántas tarjetas tiene este juego?

(e) ¿Cuántos números de 5 cifras distintas dos a dos, se puede formar con los dígitos $1, 2, 3, 4, \cdots, 9$?

(f) ¿De cuántas formas distintas puede ordenarse 10 naipes tomados de un mazo de naipes?

3. $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ **donde** $0 \leq k < n$

(a) ¿De cuántas formas se puede sacar k elementos de un conjunto de n elementos?

(b) ¿Cuántos subconjuntos de k elementos tiene un conjunto de n elementos?

(c) De una colección de n objetos, de cuántas formas puede sacarse k objetos?

(d) Pedro tiene 6 camisas sucias. De ellas, sólo puede llevar 4 a la lavandería. ¿Cuántas formas distintas tiene para elegir las 4 camisas?

(e) Pedro tiene 6 camisas sucias. De ellas, sólo puede llevar 2 a la lavandería. ¿Cuántas formas distintas tiene para elegir las 2 camisas?

(f) Un curso tiene 60 estudiantes. Sólo 55 de ellos llegaron el primer día de clases.

¿De cuántas formas distintas puede haber ocurrido esto?

(g) En un juego de azar con tarjetas que se organiza para una fiesta escolar, cada tarjeta viene con 6 números distintos del 1 al 100. No hay dos tarjetas con los mismos números.

¿Cuántas tarjetas tiene el juego?

(h) ¿De cuántas formas se puede elegir 5 dígitos? (Los dígitos son: $0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 9$)

(i) ¿De cuántas formas distintas puede salir una mano de poker?

4. $k^n = k \times k \times k \times \cdots \times k;\quad n$ **veces**

(a) ¿De cuántas formas se puede llenar k casilleros con n objetos distintos (pudiendo repetir objetos).

(b) Se lanza 4 monedas al aire que caen sobre una mesa, ¿cuáles son las combinaciones posible?

(c) Se lanza 3 dados sobre una mesa, ¿cuáles son las combinaciones posibles?

(d) En una tienda deportiva tienen en liquidación ropas azules y blancas. Pedro va a comprar un par de medias, un pantalón y una camisa. ¿Cuántas formas distintas puede elegir las 3 prendas?

(e) Un curso tiene 60 estudiantes. Rinden una prueba y sólo hubo notas 4, 5, 6 y 7.

¿Cuáles son todas las combinaciones posibles que puede tener el listado de notas?

(f) En un juego de azar con tarjetas que se organiza para una fiesta escolar, cada tarjeta viene con 6 números elegidos cada uno del 1 al 100. No hay dos tarjetas con los mismos números.

¿Cuántas tarjetas tiene el juego?

(g) ¿Hay cuántos números de 5 dígitos? (Los dígitos son: $0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 9$)

(h) Se elige 4 cartas de un juego de naipes, cada una de una pinta distinta. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

5. **Producto**

Las combinaciones posibles entre eventos independientes que ocurren simultaneamente se calculan multiplicando.

(a) Para una elección de Consejo Municipal se presentan 3 candidatos a Alcalde, y 10 candidatos a Consejales. Considerando que se elige a sólo 5 Consejales, ¿de cuántas formas puede quedar constituido el Consejo Municipal después de las elecciones?

(b) Las patentes de auto de hace unos años atras tenían 2 letras y 4 dígitos. Asumiendo que el alfabeto tiene 24 letras, ¿cuántas patentes distintas son posibles?

¿Cuántas de estas patentes tienen las dos letras distintas?

¿Cuántas de estas papentes tienen todos los dígitos distintos?

¿Cuántas de estas patentes tienen las dos letras distintas y todos los dígitos distintos?

¿Cuántas de estas patentes tienen las dos letras distintas y sólo un par de dígitos iguales?

(c) Las últimas patentes de auto tiene 4 letras y 2 dígitos. Asumiendo que el alfabeto tiene 24 letras, ¿cuántas patentes distintas son posibles?

¿Cuántas de estas patentes tienen las cuatro letras distintas?

¿Cuántas de estas papentes tienen los dos dígitos distintos?

¿Cuántas de estas patentes tienen las cuatro letras distintas y los dos dígitos distintos?

¿Cuántas de estas patentes tienen sólo un par de letras iguales y los dos dígitos distintos?

(d) Observe que todos los casos del apartado 4. son un caso particular de sucesos independientes que ocurren simultaneamente.

6. $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_r!}$ **donde** $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n.$

Con esta fórmula se resuelve el problema 15 de la Guia N3, el del artesano. Y en menor medida el problema 13. Si el domador en vez de 4 tigres y 5 leonas, tuviera 4 tigres y 9 leonas, ahí tiene más sentido usar esta fórmula.

(a) ¿De cuántas formas se puede ordenar n objetos donde hay algunos de ellos iguales (indistinguibles)?

(b) ¿De cuántas formas se puede ordenar las letras A,A, B, B, B?

(c) En una biblioteca de matemáticas tienen 5 copias de un libro álgebra, 4 copias de un libro de cálculo y 7 copias de un libro de geometría.

¿De cuántas formas se puede ordenar estos libros en un estante si los libros de álgebra, los libros de cálculo y los libros de geometría deben quedar juntos?

¿De cuántas formas pueden quedar ordenados estos libros si sólo los libros de álgebra y de cálculo quedan juntos?

¿De cuántas formas pueden ordenarse estos libros si quedan todos mezclados?

(d) Un computador utiliza sólo los dígitos 0 y 1 para guardar toda su información.

¿Cuántas secuencias de 16 pulsos puede guardar utilizando 10 ceros y 6 unos? Un pulso es un 0, o un 1.

(e) Un jugador de poker tiene un full en la mano. ¿De cuántas formas pueden quedar ordenados los colores en la mano de este jugador?

2 Propiedades

- $n! = n \times (n-1)!$
- $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$
- $P(n,k) = k! \times \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

3 Miscelánea de conteo

1. ¿De cuántas formas distintas se puede escribir un número natural n como suma de dos sumandos? Considere $n = 2$; $n = 3$; $n = 4; \cdots$ y generalice.

2. ¿De cuántas formas distintas se puede escribir un número natural n como suma de tres sumandos? Considere $n = 3$; $n = 4$; $n = 5; \cdots$ y generalice.

3. ¿De cuántas formas distintas se puede escribir un número natural n como suma de k sumandos? Aquí, $1 \leq k \leq n$. Denote por $S(n,k)$ a este número.

4. ¿Cuántas fichas tiene un juego de dominó?

5. ¿Cuántas fichas tendría un juego de dominó que llegara hasta el chancho 9?

6. Un juego de dominó para niños llega hasta el chancho 2. ¿De cuántas formas se pueden encadenar todas las fichas? ¿Cuáles son el primer y último número de cada cadena?

7. Un juego de dominó para niños llega hasta el chancho 3. ¿De cuántas formas se pueden encadenar todas las fichas? ¿Cuáles son el primer y último número de cada cadena?

8. ¿Cuántas diagonales tiene un n-polígono convexo? Haga $n = 4, 5, 6, ...$ y generalice.

9. Dados n puntos en el plano, donde no hay tres de ellos colineales, ¿cuántas rectas puede trazar que pasen por dos de esos puntos?

10. Dados n puntos en el plano, donde no hay tres de ellos colineales, ¿cuántas triángulos con vértices en estos puntos puede dibujar? ¿Cuántos cuadriláteros?.

11. ¿De cuántas formas se puede alinear las figuras $\emptyset; \emptyset; \triangle; \triangle; \triangle$?

12. ¿De cuántas formas se puede reordenar la 3-tupla $(1, 2, 3)$ de modo que no queden coordenadas iguales? ¿Y una 4-tupla? ¿Y una n-tupla. Anote por K_n a este número.

    Indicación: Cuente cuántos reordenamientos de una 3-tupla dada hay (respectivamente 4-tupla, ... , n-tupla), y réstele las que tienen 1 coordenada igual, dos coordenadas iguales, etc.

    Observación: este ejercicio es idéntico al ejercicio 6 de la Guia $N°$ 3.

4 Ejercicios

1. En un cultivo de bacterias, éstas se duplican cada 20 minutos. ¿Cuántas veces el número original de bacterias hay en el cultivo al cabo de 2 horas si se supone que ninguna muere?

2. Resuelva la ecuación $(n + 2)! = 90 \cdot n!$ para $n \in \mathbf{N}$.

3. Pruebe que $(n^2 - n)(n - 2)! = n!$

4. Pruebe que si $0 \leq k \leq n - 2$, entonces
$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

5. Pruebe: $\binom{m}{n+1} = \frac{m-n}{n+1}\binom{m}{n}$

6. Pruebe: $\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$

7. Pruebe: $\begin{pmatrix} m+1 \\ n+1 \end{pmatrix} = \frac{m+1}{n+1}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

8. ¿De cuántas formas se pueden disponer sobre un círculo las figuras $\emptyset; \emptyset; \triangle; \triangle; \triangle$?

9. ¿De cuántos partidos consta una liguilla formada por cuatro equipos?

10. ¿De cuántas formas se puede cubrir los puestos de presidente, vice-presidente y secretario de un club, si se sabe que hay 12 candidatos?

11. ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se puede formar con los dígitos impares? ¿Cuántos de ellos son mayores de 70.000?

12. A una reunión asisten 10 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado? ¿De cuántas formas se pueden sentar en torno a una mesa?

13. Con el punto y raya del sistema Morse, ¿cuántas señales distintas se puede enviar, usando como máximo cuatro pulsaciones?

14. Una mesa presidencial está formada por ocho personas, ¿de cuántas formas distintas se pueden sentar, si el presidente y el secretario siempre van juntos?

15. Un grupo, compuesto por cinco hombres y siete mujeres, forma un comité de 2 hombres y 3 mujeres. De cuántas formas puede formarse, si:

    a. Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer.

    b. Una mujer determinada debe pertenecer al comité.

    c. Dos hombres determinados no pueden estar en el comité.

16. Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si:

    a. Los libros de cada asignatura deben estar todos juntos.

    b.Solamente los libros de matemáticas deben estar juntos.

17. Se ordenan en una fila 5 bolas rojas, 2 bolas blancas y 3 bolas azules. Si las bolas de igual color no se distinguen entre sí, ¿de cuántas formas posibles pueden ordenarse? ¿De cuántas formas se pueden ordenar sobre un círculo?

18. Encuentra cuántos números capicúa hay de ocho cifras. ¿Cuántos capicúas hay de nueve cifras?

19. ¿Cuántas 'palabras' puede formarse usando todas las letras de la palabra AMASAS?

20. Con 5 signos + y 3 signos ¿Cuántas cadenas de símbolos se puede formar? ¿De cuántas formas se pueden disponer sobre un círculo?