Guia 2 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2013

Sumatorias, Inducción y binomio de Newton

1. Si $x_1 = 2, \;\; x_2 = 5, \;\; x_3 = 9, \;\; x_4 = -9, \;\; x_5 = 0, \;\; x_6 = -5.$

   Determine el valor de:

   a) $\sum_{i=1}^{3}(x_i - 2)$.
   b) $\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i+2}{(x_i+7)^2}$.
   c) $\sum_{i=1}^{6} \frac{x_i^2-4}{x_i}$.

2. Use el símbolo Σ para abreviar las sumas que aparecen y encuentre su valor (verifique con el resultado que se indica).

   a) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1)$. (resp: $\frac{n(3n+1)}{2}$)
   b) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1}$. (resp: $2^n - 1$)
   c) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3$. (resp: $n^2(2n^2 - 1)$
   d) $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + (2n - 1) \cdot (2n)$. (resp: $\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$)

3. Determine si cada una de las siguientes sumas son verdaderas o falsas.

   a)
   $$\sum_{n=0}^{100}(n+1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2$$
   b)
   $$\sum_{k=1}^{100} k^3 = (\sum_{k=1}^{100} k^2)(\sum_{k=1}^{100} k)$$
   c)
   $$\sum_{k=0}^{100}(2+k) = 2 + \sum_{k=1}^{100} k$$
   d)
   $$\sum_{k=0}^{100} 2 = 200$$

4. Use el símbolo Σ para abreviar las siguientes sumas y encuentre su valor.

   a) Calcule el valor de la suma de los primeros n cuadrados.

   b) Calcule la suma de los primeros n números pares.

   c) Calcule

   $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}.$

   d) Calcule

   $1+r+r^2+r^3+...+r^n.$

   e) Calcule la suma de los primeros n cubos.

   f) Calcule

   $1+1+x+1+x+x^2+1+x+x^2+x^3+1+x+x^2+x^3+x^4+1+x+x^2+x^3+x^4+x^5.$

5. Calcular:

   a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

   b) $\sum_{k=20}^{100}(3+5k)$.

   c) $\sum_{k=1}^{n}(a+kb)$.

   d) $\sum_{k=m}^{p}(-2-7k^2)$.

   e) $\sum_{k=1}^{n}(2k-3)(k+1)$.

   f) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

   g) $\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$.

   h) $\sum_{k=1}^{n}(-2)^n\left(-\frac{2}{3}\right)^{k+2}$.

   i) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}$.

   j) $\sum_{k=1}^{n}[(2k-1)^3+10]$.

   k) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(2k-j)$. $(\star)$

   l) $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{k^2+2k+1}-\frac{k-1}{k^2}\right]$.

   m) $\sum_{k=0}^{n}[(k-1)^2-k^2]$.

6. Determine cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera lo demuestra y en caso de ser falsa muestre un contraejemplo.

a) La suma de los primeros n números naturales es el semi-producto entre n y su sucesor.

b) La suma de un número natural y su cuadrado es un número par.

c) La suma de los primeros n números impares es igual al n-ésimo cuadrado.

d) El número n^2+n+1 es un número primo independiente del valor que tome $n \in \mathbb{N}$.

e) Un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

f) Si en una fiesta hay n personas y todos se saludan entre si una sola vez en total hay $\frac{n(n-1)}{2}$ saludos.

g) El número 9 divide $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ $(\star)$.

h) El número 3 divide $7^n - 4^n$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ $(\star)$.

i) Si x es positivo entonces $(1+x)^n \geq 1+nx$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ $(\star)$.

j) $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$. $(\star)$

7. Un jardinero, Don Ramón, tiene que regar 10 árboles que están dispuestos en una hilera separados entre sí por $6m$, Don Ramón regará los árboles con un balde que llenará de una llave que está a $10m$ del primer árbol. Determine cuánto camina Don Ramón después de regar el último árbol.

8. El abuelo de Carlos le ofrece: *mire Carlitos le daré 500 bolitas, mañana 1000 bolitas, pasado mañana 1500 bolitas, al otro día 2000 bolitas y así sucesivamente 500 bolitas más que el día anterior por dos años, o bien si tu prefieres hoy te doy una bolita, mañana 2 bolitas, pasado 4 bolitas, al otro día 8 bolitas y así sucesivamente el doble de bolitas que el día anterior por mes. Bien Carlitos Qué prefieres?*. Si tu fueses Carlos, Cuál de las opciones tomarías?. Justifique.

9. Dos trenes viajan por la misma línea férrea a $40km/hr$, uno en dirección opuesta al otro, cuando los separan $100km$, de uno de los trenes sale un juguete volando electrónico a una velocidad de $80km/hr$, cuando llega al tren opuesto se devuelve, cuando llega al primero se

devuelve al segundo y así sucesivamente hasta que rompe en el choque de los trenes. Qué distancia ha recorrido el juguete cuando llega por centésima vez al primer tren?.

10. Encuentre los términos centrales y los términos independientes de x en:

    a) $\left(3x - \frac{6}{x}\right)^{10}$
    b) $\left(\frac{4x}{5} - \frac{5}{2x}\right)^{5}$
    c) $\left(\sqrt{10-x} + \sqrt{20-x}\right)^{24}$
    d) $(3x^{65}+2)\cdot\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ $(\star)$

11. Determine:

    a) a_7 en $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 6n$.
    b) t_7 en $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2x}{y}\right)^7$.

12. Calcular:

    a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1}$
    b) $\sum_{k=0}^{423} \binom{423}{k}$
    c) $\sum_{k=0}^{1012} \binom{1012}{k} (-1)^k$.
    d) $\sum_{k=0}^{2013} 6 \binom{2013}{k} 3^k$

13. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

    a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, para cualquier $n,\ k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$.
    b) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.
    c) La suma de los términos de la n-ésima fila del triángulo de Pascal es 2^n.
    d) En el desarrollo de $(3x^2 - x^{-1})^6$, no hay términos independientes de x.
    e) En cualquier fila del Triángulo de Pascal, si se suma los elementos alternando el signo, resulta cero.

f) El desarrollo del Binomio de Newton $(a+b)^n$, tiene n sumandos.

g) Si $\left(\begin{array}{c} 12 \\ x \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 12 \\ 3 \end{array}\right)$, entonces $x = 3$.

h) $a_n = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$, es un número entero para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

i) Para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$, se cumple
$\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) 2^{k+1} = 2 \cdot 3^n$.

j) Si $p \in \mathbb{N}$, entonces
$\sum_{k=p}^{n} \left(\begin{array}{c} k \\ p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ p+1 \end{array}\right)$.