Control 4 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Miércoles 17 de Abril, 2013

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Determine los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{1+x}{x-1}.$$

Solución:

Primero debemos reducir la inecuación dada:

$$\tfrac{2}{x+1} \geq \tfrac{1+x}{x-1} \iff \tfrac{2}{x+1} - \tfrac{1+x}{x-1} \geq 0 \iff \tfrac{-x^2-3}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \iff \tfrac{x^2+3}{(x+1)(x-1)} \leq 0 \quad (1).$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Además como $x^2 \geq 0$, se tiene que: $x^2 + 3 > 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Luego la desigualdad (1) se cumple si: $(x-1)(x+1) < 0$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Esta última la realizaremos usando tabla.

Puntos críticos: $x+1=0 \iff x=-1$ y $x-1=0 \iff x=1$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Tabla:

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$x+1$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$x-1$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(x+1)(x-1)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

De acuerdo a lo obtenido en la última fila se tiene que la solución está dada por: $S =]-1, 1[$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, demuestre:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \frac{a+b}{2}.$$

En efecto:

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ tal que $(a-b)^2 \geq 0$, ya que $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 \geq 0 &\iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \ / + 4ab \\
&\iff a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \ \textbf{(1 punto)} \\
&\iff (a+b)(a+b) \geq 4ab \ / : ab > 0 \ \textbf{(1 punto)} \\
&\iff \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)(a+b) \geq 4 \ / : \frac{1}{a}+\frac{1}{b} > 0 \ \text{(suma de números positivos es positiva)} \\
&\quad\ \textbf{(1 punto)} \\
&\iff (a+b) \geq \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \ / : 2 \ \textbf{(1 punto)} \\
&\iff \frac{(a+b)}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.
\end{aligned}$$

Si $a \neq b$ se tiene la desigualdad pedida. **(1 punto)**