Ejercicios.

1. Considere las funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$. Demuestre que:
   (a) Si $(g \circ f)$ es una función inyectiva, entonces f también lo es.
   (b) Si $(g \circ f)$ es una función sobreyectiva, entonces g también lo es.

2. Considere la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{-(n-1)}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$
   Demuestre que f es biyectiva.

3. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por
$$f(x) = \begin{cases} 10 - x & \text{si } x \geq 1 \\ 4 - x & \text{si } x < 1 \end{cases}, \qquad g(x) = 2 + x$$
   Calcule $(f \circ g)$ y decida si es creciente, decreciente o ninguna de las anteriores.

4. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{-3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$, definida por $f(x) = \frac{1-x}{x+3}$. Demuestre que f es una función biyectiva, grafique f , indicando intersección con los ejes y asíntotas.

5. Analice la existencia de los siguientes límites.
   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{|x^2-1|}{x^2+x-2}$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{2x}$
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
   (d) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
   (e) $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$
   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{1/(x+1)-1}{x}$
   (g) $\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2 - x}$
   (h) $\lim_{x\to 2} \frac{2(4-x^2)+|4-x^2|}{3(4-x^2)-|4-x^2|}$
   (i) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+|x-8|+1}{x|2x-6|}$

6. Demuestre que el gráfico de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xsen(x) + 2$, intersecta al eje X.

7. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \leq 1\}$. Indique (si es que existen) máximo, mínimo, Supremo e Ínfimo de A.

8. Una caja cerrada de sección cuadrada, de lado x, tiene un área de $100cm^2$.

   (a) Exprese el volumen V como funció de la variable x.

   (b) Encuentre las dimensiones de la caja de volumen máximo.

9. Resuelva la siguiente inecuación $\left|\frac{5x-3}{x-1}\right| \leq 7$.

10. Dada la función $f : Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x-1|+|3x+7|}{(x-1)|x+|x+1||} - \frac{1}{3}$.
    Encuentre $Dom(f)$ y el conjunto $A = \{x \in Dom(f) : f(x) < 0\}$.

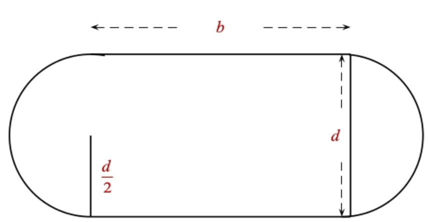
11. Dado el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : ||x| - a| < 1\}$. ¿Qué condiciones debe cumplir a para que el conjunto S sea vacío?

12. Se va a construir un caja de caras laterales rectangulares, con base y tapa cuadradas con capacidad de 8 m^3 para almacenar trigo.

    (a) Expresar el área de la caja como función del lado de la base. Al decir como función significa: fórmula, dominio y codominio.

    (b) Si un maestro nos dice que el material para construir la base y la tapa tiene un costo de \$1.000 por m^2 y el material para construir las caras laterales tiene un costo de \$700 por m^2, y otro maestro nos dice que el material para construir la base y la tapa tiene un costo de \$1.500 por m^2 y el material para construir las caras laterales tiene un costo de \$500 por m^2. ¿Para realizar cajas de qué medidas nos conviene contratar al primer maestro y para cuáles el segundo?

13. Una pista, de 400 m de longitud, tiene lados paralelos y cabeceras semicirculares.



(a) Encuentre el área encerrada por la pista como función del diámetro d de los semicírculos. Al decir como función significa: fórmula, dominio y codominio.

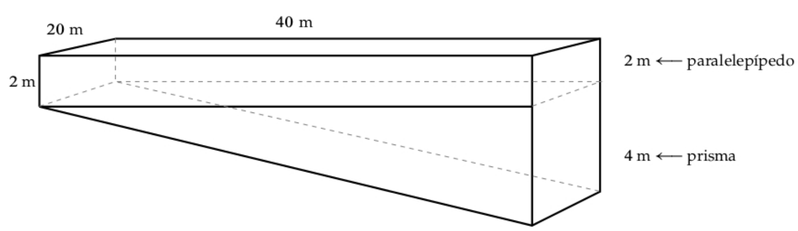
(b) Encuentre para que diámetros el área es mayor a $400/\pi$ $[m^2]$

14. Un cordel de 10 m de largo se corta en dos partes; con una de ellas de forma un cuadrado y con la otra se forma un triángulo equlátero. Si x es la longitud del lado del triángulo.

    (a) Encuentre la suma de las áreas del cuadrádo y el triángulo como función de x. Al decir como función significa: fórmula, dominio y codominio.

    (b) Encuentre las dimensiones de los lados del triángulo y el cuadrado para los cuales la suma de las áreas es máxima.

15. La piscina mostrada en la figura tiene 2 m de profundidad mínima y 6 m de profundidad máxima, 40 m de largo, 20 m de ancho y el fondo es un plano inclinado.



    (a) Encuentre el volumen del agua contenida en la piscina en función de la altura h del nivel del agua desde la parte más profunda de la piscina. Al decir como función significa: fórmula, dominio y codominio.

    (b) Grafique la función encontrada en (a).

16. Determine el dominio de la función definida por la fórmula $f(x) = \sqrt{|3x-4|-2}$.

17. Analice el comportamiento de la función

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Determinando: dominio, recorrido, ceros, signo, existencia de asíntotas horizontales y verticales, y acotamiento. Utilice la información obtenida para esbozar el gráfico de f.

18. Considere las funciones definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x(x^2 + 13x - 30) \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Encuentre la función $g \circ h$ y grafíquela.

19. Dada la función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}.$$

(a) Determine el dominio, los ceros y el signo de f.

(b) Determine el recorrido de f.

(c) Demuestre que todo y en el recorrido de f , $y \neq 1$, tiene exactamente dos preimágenes. ¿Cuántas preimágenes tiene $y = 1$?

20. Dada la función

$$f(x) = \frac{|x| - 23}{x + 23}.$$

(a) Determine el dominio y los ceros de f.

(b) Escriba f sin usar el símbolo de valor absoluto (como una función por partes).

(c) Demuestre que $f(x) < 1$ para todo $x \in Dom(f)$.

(d) Pruebe que $f(x) \geq -1$ para todo $x \geq 0$.

(e) Determine $h(x) = [f(x)]$, (parte entera de $f(x)$) y grafique $h(x)$.