

Segunda Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 30 de Septiembre, 2013

1. Use el símbolo Σ para abreviar las siguientes sumas, luego use las propiedades vistas en clases para resolverlas.

a) Calcule $4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + \dots + 200^2$

b) Calcule la suma de los primeros n números impares.

c) Calcule $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \dots + (\frac{1}{10} - \frac{1}{11})$

d) Calcule $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{3^3}{2^4} + \dots + \frac{3^{100}}{2^{101}}$

e) Calcule $5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + \dots + 201^3$

f) Escriba cada paréntesis como una sumatoria y resuelva.

$$(1) + (1+x) + (1+x+x^2) + (1+x+x^2+x^3) + (1+x+x^2+x^3+x^4) + (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5).$$

g) Un jardinero, Don Ramón, tiene que regar 10 árboles que están dispuestos en una hilera separados entre sí por $6m$, Don Ramón regará los árboles con un balde que llenará de una llave que está a $10m$ del primer árbol. Determine ¿cuánto camina Don Ramón después de regar el último árbol?

h) El abuelo de Carlos le ofrece: mire Carlitos hoy le daré 500 bolitas, mañana 1000 bolitas, pasado mañana 1500 bolitas, al otro día 2000 bolitas y así sucesivamente 500 bolitas más que el día anterior por dos años, o bien si tu prefieres hoy te doy una bolita, mañana 2 bolitas, pasado 4 bolitas, al otro día 8 bolitas y así sucesivamente el doble de bolitas que el día anterior por un mes. Bien Carlitos ¿Qué prefieres?. Si tu fueses Carlos, ¿Cuál de las opciones tomaría?. Justifique.

i) Dos trenes viajan por la misma línea férrea a $40km/hr$, uno en dirección opuesta al otro, cuando los separan $100km$, de uno de los trenes sale un juguete electrónico volando a una velocidad de $80km/hr$, cuando llega al tren opuesto se devuelve, cuando llega al primero se devuelve al segundo y así sucesivamente hasta que rompe en el choque de los trenes. ¿Qué distancia ha recorrido el juguete cuando llega por centésima vez al primer tren?.

2. Determine si cada una de las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

$$\begin{array}{ll}
 a) \sum_{n=0}^{100} (n+1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2 & b) \left(\sum_{k=1}^{100} k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{100} k \right) = \sum_{k=0}^{100} k^3 \\
 c) \sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 + \sum_{k=1}^{100} k & d) \sum_{k=0}^{100} 2 = 200
 \end{array}$$

3. Calcule las siguientes sumas.

$$\begin{array}{ll}
 a) \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{k^2 - 1} & b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} \\
 c) \sum_{k=1}^n \frac{3}{k^2 + 5k + 6}
 \end{array}$$

4. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^4 k2^k &= 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 \\
 &= 2^1 + (2^2 + 2^2) + (2^3 + 2^3 + 2^3) + (2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4) \\
 &= (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^3 + 2^4) + (2^4) \\
 &= \sum_{i=1}^4 2^i + \sum_{i=2}^4 2^i + \sum_{i=3}^4 2^i + \sum_{i=4}^4 2^i \\
 &= \sum_{k=1}^4 \sum_{i=k}^4 2^i
 \end{aligned}$$

Use esta idea para demostrar que $\sum_{k=1}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

5. Demuestre las siguientes igualdades usando las propiedades de las sumatorias.

$$a) \sum_{k=1}^n kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2} [1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}], r \neq 1$$

Ayuda: Expanda la suma y use la misma idea del ejercicio 4.

$$b) \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 = (n+1)(2n+1)$$

Ayuda: Expanda esta suma y sepárela en dos sumas, donde una conste de todos los términos positivos y otra de todos los términos negativos.

$$c) \sum_{k=1}^n \frac{2k}{k^4 + k^2 + 1} = 1 - \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

Ayuda: Use el hecho que $(k^4 + k^2 + 1) = (k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1)$ para separar en fracciones parciales.

6. Calcular:

$$a) \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k - 1}{(k+2)!} \quad b) \sum_{k=1}^n \frac{k^2 - 2}{(k+2)!} \quad c) \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 5k + 5}{(k+4)!}$$

7. Demuestre que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Ayuda: Resuelva la suma del lado izquierdo de la desigualdad usando propiedades de sumatorias ya analice su resultado.

8. Resolver los ejercicios propuestos (del 1 al 12) de libro Zegarra (pág. 129)