Control 2 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 30 de Septiembre, 2013

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Sean A y B son dos conjuntos de sólo 3 elementos con $x \in A$, $\{x\} \subset B$, $y \notin A$ e $\{y\} \in B$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas o ninguna de las anteriores. Justifique todas sus respuestas.

   (a) $A \cup B$ tiene 6 elementos.

   (b) $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$.

   (c) $\{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

   (d) $\{\{y\}\} \in \mathcal{P}(B)$.

   Solución:

   (a) ***Falso***. Sabemos que $\{x\} \subset B$, es decir, el elemento x (del conjunto $\{x\}$) pertenece a conjunto B. Luego, los conjuntos A y B tienen a x como elemento común, esto sumado a que ambos conjuntos tienen 3 elementos, nos hace concluir que $A \cup B$ tiene a lo más 5 elementos.

   (b) ***Verdadero***. Por definición de conjunto potencia, $\{x\} \subset B$, es equivalente a, $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$.

(c) ***No se sabe***. Con la información que nos entregan no se puede concluir que $y \in A$ o que $y \in B$. Por lo tanto, no se sabe si $y \in (A \cup B)$, que es lo que necesitaríamos para concluir que $\{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

(d) ***Verdadero***. Sabemos que $\{y\} \in B$, con esto concluimos que $\{\{y\}\} \subset B$. Por lo tanto, $\{\{y\}\} \in \mathcal{P}(B)$.

2. Decida si la siguiente proposicion son verdadera o falsa. De ser cierta demuéstrela, de lo contrario muestre un contraejemplo.

"Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$."

Solución:

$$\begin{aligned} \textit{Hipótesis} &: \quad A \subset B. \\ \textit{Por demostrar:} &: \quad A \cap B = A. \end{aligned}$$

Recordemos que para probar que $A \cap B = A$ debemos probar que $A \cap B \subset A$ y $A \subset A \cap B$. La primera contención es una propiedad que se cumple siempre y que además se demostró en clases. Luego, sólo faltaría probar que $A \subset A \cap B$, para esto sea $a \in A$,

$$a \in A \Rightarrow a \in B \ \text{(por hipótesis } A \subset B) \Rightarrow a \in A \ \wedge \ a \in B \Rightarrow a \in (A \cap B)$$

$$\therefore \ \text{Hemos demostrados que } A \subset A \cap B, \ \text{con lo cual se tiene } A \cap B = A.$$