Control 4 (Pauta) de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 28 de Octubre, 2013

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. La concentración de cierto calmante suministrado mediante suero, varía su efectividad en el tiempo según la expresión

$$C(t) = t^2 - 2t + 5,$$

donde $C(t)$ se mide en miligramos por litro y el tiempo t en horas. Se determinó que el calmante no produce daños colaterales y es efectivo si la concentración es de por lo menos 8 miligramos por litro y a lo más 13 miligramos por litro ¿Durante cuánto tiempo es efectivo el calmante?

Solución: De acuerdo a los datos aportados por el planteo del problema, para tener efectividad del calmante debemos tener que $8 \leq t^2 - 2t + 5 \leq 13$. De esto se desprende que hay que encontar la solución de

$$8 \leq t^2 - 2t + 5 \quad \wedge \quad t^2 - 2t + 5 \leq 13.$$

Resolvemos primero la inecuación $8 \leq t^2 - 2t + 5$, la cual es equivalente a $0 \leq (t+1)(t-3)$.

Para esto recurrimos a la tabla de signos.

	$t < -1$	$-1 < t < 3$	$t > 3$
$(t+1)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(t-3)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$(t+1)(t-3)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Luego, $0 \leq (t+1)(t-3) \;\Leftrightarrow\; t \in \,]-\infty, -1] \cup [3, \infty[$.

Ahora buscamos las soluciones de $t^2 - 2t + 5 \leq 13$ o equivalentemente $(t-4)(t+2) \leq 0$. Construimos una tabla de signos, como antes, obteniendo

	$t < -2$	$-2 < t < 4$	$t > 4$
$(t+2)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(t-4)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$(t+2)(t-4)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Luego, $(t+2)(t-4) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; t \in\; [-2, 4]$.

Finalmente, la solución de la inecuanción $8 \leq t^2 - 2t + 5 \leq 13$ es

$$(]-\infty, -1] \cup [3, \infty[) \cap [-2, 4] = [-2, -1] \cup [3, 4].$$

Pero dado que t representa tiempo, concluimos que calmante es efectivo para los tiempo (en horas) $t \in\; [3, 4]$.

2. Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}$ que cumplen la siguiente inecuación.

$$\left|\frac{2}{x}\right| \geq \frac{x}{5}.$$

Solución: Notemos que $x = 0$ no es solución de la inecuación. Además,

	$x < 0$	$x > 0$
$\lvert 2/x \rvert$	$-2/x$	$2/x$

Luego, resolveremos la inecuación separándola en 2 casos:

(a) <u>Caso I</u> : $x < 0$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \left|\dfrac{2}{x}\right| & \geq & \dfrac{x}{5} \\
\Leftrightarrow & -\dfrac{2}{x} & \geq & \dfrac{x}{5} \\
\Leftrightarrow & 0 & \geq & \dfrac{x}{5} + \dfrac{2}{x} \\
\Leftrightarrow & 0 & \geq & \dfrac{x^2+10}{5x}
\end{array}
$$

$$\therefore\ x \in]-\infty, 0[$$

$$\therefore\ S_1 =]-\infty, 0[\cap (\text{condición } 1) =]-\infty, 0[$$

(b) <u>Caso II</u> : $x > 0$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \left|\dfrac{2}{x}\right| & \geq & \dfrac{x}{5} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{2}{x} & \geq & \dfrac{x}{5} \\
\Leftrightarrow & 0 & \geq & \dfrac{x}{5} - \dfrac{2}{x} \\
\Leftrightarrow & 0 & \geq & \dfrac{x^2-10}{5x} \\
\Leftrightarrow & 0 & \geq & \dfrac{(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})}{5x}
\end{array}
$$

Construimos una tabla de signos, obteniendo

	$x < -\sqrt{10}$	$-\sqrt{10} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{10}$	$x > \sqrt{10}$
$(x-\sqrt{10})$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$(x+\sqrt{10})$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$5x$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$\frac{(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})}{5x}$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

$$\therefore\ x \in]-\infty, -\sqrt{10}] \cup]0, \sqrt{10}]$$

$$\therefore\ S_2 = (]-\infty, -\sqrt{10}] \cup]0, \sqrt{10}]) \ \cap\ (\text{condición } 2) =]0, \sqrt{10}]$$

Finalmente la solución de la inecuación es:

$$S_F = S_1 \cup S_2 =]-\infty, 0[\cup]0, \sqrt{10}[.$$