Prueba Global de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Jueves 26 de Diciembre, 2013

Pregunta 1. Resuelva ambas preguntas.

(a) **(3 pts.)** Demuestre que existe al menos un $x \in \mathbb{R}$ que satisface la ecuación:

$$x^2 = x sen(x) + cos(x).$$

(b) **(3 pts.)** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq x^4 + x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es continua en cero. (Ayuda: Primero pruebe que $f(0) = 0$).

Solución:

(a) Consideremos $f(x) = x sen(x) + cos(x) - x^2$ y notemos que encontrar un valor que cumpla la anterior igualdad es equivalente a encontrar un cero de la función f. Luego, observamos

a) $f(0) > 0$.

b) $f(\pi/2) < 0$.

c) f es una función continua al ser multiplicación, potencia, suma y resta de las funciones continuas x, $sen(x)$ y $cos(x)$.

Por lo tanto, el teorema de Bolzano nos asegura que hay un $c \in (0, \pi/2)$ con $f(c) = 0$, con lo cual tendremos

$$c^2 = c \cdot sen(c) - cos(c).$$

(b) Primero probaremos que $f(0) = 0$, para esto evaluamos la desigualdad, que sabemos cumple f, en $x = 0$, con lo cual tendremos

$$|f(0)| \leq 0^4 + 0^2.$$

es decir, $|f(0)| \leq 0$, lo cual implica que $f(0) = 0$.

Luego, para que f sea continua en 0 se debría cumplir que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Para probar que el anterior límite efectivamente vale 0, usaremos el teorema del sandwich, ya que sabemos que $|f(x)| \leq x^4 + x^2$. Así,

$$\begin{array}{rcccl} -(x^4 + x^2) & \leq & f(x) & \leq & x^4 + x^2 \\ \lim\limits_{x \to 0}(x^4 + x^2) & \leq & \lim\limits_{x \to 0} f(x) & \leq & \lim\limits_{x \to 0} -(x^4 + x^2) \\ 0 & \leq & \lim\limits_{x \to 0} f(x) & \leq & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, es decir, f es continua en $x = 0$.

Pregunta 2. Resuelva ambas preguntas.

(a) **(3.0 pts.)** Sea f la función determinada por

$$f(x) = \begin{cases} sen(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - cos(x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Decida en que puntos la función es diferenciable.

(b) **(3.0 pts.)** Grafique la función definida mediante $f(x) = sen(-2x) + 4$ con $x \in [0, \pi]$. Para hacer este gráfico utilice todas la herramientas que conoce para determinar intervalos de monotonía, concavidad, máximos y mínimos (relativos y globales).

Solución:

(a) Para saber en que puntos la función es diferenciable, la analizaremos por casos.

(i) **Caso 2:** $x < 0$

En este caso $f(x) = 1 - cos(x)$, por lo tanto $f'(x) = sen(x)$.

(ii) **Caso 1:** $x > 0$

En este caso $f(x) = sen(x)$, por lo tanto $f'(x) = cos(x)$.

(iii) **Caso 3:** $x = 0$

Por definición sabemos que

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Pero dado que la función es distinta a la derecha y a la izquierda de cero, tendremos que analizar límites laterales.

* $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{sen(x)}{x} = 1.$
* $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - cos(x)}{x} = 0.$

$$\therefore\ f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \text{ no existe.}$$

Así, f es diferenciable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

(b) Para obtener el gráfico de la función $f(x) = sen(-2x) + 4$ necesitamos:

(i) $f'(x) = -2cos(-2x) \ \Rightarrow\ f'(x) = 0$ para $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{3\pi}{4}$.

Luego,

	$0 \leq x < \pi/4$	$\pi/4 < x < 3\pi/4$	$3\pi/4 < x < \pi$
$cos(-2x)$	$+$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

Por lo tanto, f decrece en $[0, \pi/4[$ y $]3\pi/4, \pi]$, y f crece en $]\pi/4, 3\pi/4[$.
Así, en $x = \pi/4$ hay un mínimo local y en $x = 3\pi/4$ hay un máximo local.

(ii) $f''(x) = -4sen(-2x) \ \Rightarrow\ f'(x) = 0$ para $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \pi$.

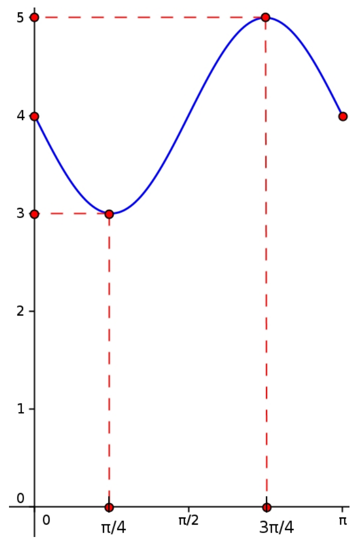
Luego,

	$0 < x < \pi/2$	$\pi/2 < x < \pi$
$sen(-2x)$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$

Por lo tanto, f es convexa en $]0, \pi/2[$ y f es cóncava en $]\pi/2, \pi[$.

Finalmente, calculamos las imágenes de los puntos importantes y gráficamos.

$$f(0) = 4 \quad f(\pi/4) = 3 \quad f(\pi/2) = 4 \quad f(3\pi/4) = 5 \quad f(\pi) = 4.$$


5
4
3
2
1
0
0
π/4
π/2
3π/4
π

Pregunta 3. Suponga que t meses después del brote de una epidemia, el número de personas infectadas es $P(t) = \frac{30t^2}{(1+t^2)^2}$, donde $P(t)$ está medido en miles de personas.

(i) **(0.5 pts.)** Indique el dominio de la función P.

(ii) **(3.0 pts.)** Determine los intervalos de tiempo en los cuales la epidemia aumenta y en los cuales la epidemia disminuye. (La epidemia aumenta o disminuye dependiendo de la cantidad de personas infectadas)

(iii) **(1.5 pts.)** ¿Existe algún instante en que la candidad de personas infectadas sea máxima? ¿mínima? De ser así, en que momento ocurre esto y cual es la cantidad de personas infectadas?

(iv) **(1.0 pts.)** ¿Qué ocurre con la epidemia a largo plazo?.

Solución:

(a) Dado que t corresponde a los meses luego del brote de la epidemia, $P(t)$ no se indetermina en ningún punto y además es siempre positivo, podemos decir que $Dom(P) = \mathbb{R}_0^+$.

(b) Notemos que conocer los intervalos de tiempo en los cuales la epidemia aumenta o disminuye es equivalente encontrar los intervalos de monotonía de la función P. Luego necesitamos calcular $P'(t)$

$$
\begin{aligned}
P'(x) &= \frac{(30t^2)'(1+t^2)^2 - 30t^2((1+t^2)^2)'}{(1+t^2)^4} \\
&= \frac{60t(1+t^2)^2 - 30t^2(2(1+t^2)2t)}{(1+t^2)^4} \\
&= \frac{60t(1+t^2)((1+t^2) - 2t^2)}{(1+t^2)^4} \\
&= \frac{60t(1+t^2)(1-t^2)}{(1+t^2)^4} \\
&= \frac{60t(1-t^2)}{(1+t^2)^3}
\end{aligned}
$$

Así, $P'(x) = 0$ para $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$, pero sólo nos quedaremos con los puntos positivos por el contexto de problema.

	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$60t$	$+$	$+$
$1 - t^2$	$+$	$-$
$(1 + t^2)^3$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$

Por lo tanto, la epidemia aumenta hasta el primer mes y luego comienza a disminuir.

(c) Usando la información encontrada en la parte (b), podemos concluir que el máximo de personas infectadas se alcanza luego de un mes y corresponde a $P(1) = 30/4 = 7,5$ miles de personas. Además en el mes cero hay $P(0) = 0$ personas infectadas, este valor corresponde al el mínimo de personas infectadas

(d) Para saber que ocurre a largo plazo con la epidemia debemos calcular el límite cuando x tiende a infinito de la función P.

$$\lim_{x\to\infty} P(t) = \lim_{x\to\infty} \frac{30t^2}{(1+t^2)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{30t^2}{1+2t^2+t^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{30}{t^2}}{\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1} = \frac{0}{0+0+1} = 0.$$

Así, la epidemia irá desapareciendo con el paso del tiempo.