Solución Movimiento Circular

Ayudantes: María José Tapia.
Dany López.
Raimundo Fernández.

13 de noviembre de 2016

Problema 1.

Calcular la velocidad angular, la velocidad lineal, y la aceleración centrípeta de la luna, derivando su respuesta del hecho que la luna realiza una revolución completa en 28 días y que la distancia promedio de la tierra a la luna es de $38.4 \times 10^4[km]$

Solucionado en ayudantía

Problema 2.

Un volante cuyo diámetro es de 8 metros tiene una velocidad angular que disminuye uniformemente de 100 rpm (revoluciones por minuto) en $t = 0$, hasta detenerse cuando $t = 4$ s. Calcular las aceleraciones tangencial y normal de un punto situado sobre el borde cuando $t = 2$s.

Solución:

Sabemos que el volante da 100 rpm, es decir, da 100 vueltas por minuto. De lo anterior, tenemos que la velocidad angular ω es

$$\omega = \frac{100 \cdot 2\pi}{60} = \frac{10\pi}{3}[\text{rad/s}] \tag{0.1}$$

Encontremos la acelaración angular α, para ello usamos la ecuación $\omega_f = \omega_i \pm \alpha t$. Considerando el sentido positivo de giro contrario al movimiento de las manecillas de un relojs, por lo tanto tenemos que para un tiempo $t_f = 4[\text{s}]$, $\omega_f = 0$, luego

$$\begin{aligned} \omega_f &= \omega_i - \alpha t_f && (0.2)\\ 0 &= \omega_i - \alpha t_f && (0.3)\\ 0 &= \frac{10\pi}{3} - \alpha(4) && (0.4)\\ \Longrightarrow \alpha &= \frac{10\pi}{12} && (0.5) \end{aligned}$$

Ojo que acá encontramos el modulo de la aceleración angular α, el signo se lo asignamos en la ecuación en relación al sistema de referencia positivo que consideramos.

Calculemos la velocidad angular ω_2 en $t = 2$[s] para luego determinar $a_c = \omega_2^2 R$ y $a_t = \alpha R$. Para ello, usaremos la misma ecuación que se usó antes,

$$\omega_2 = \omega_i - \alpha t \tag{0.6}$$

$$\omega_2 = \frac{10\pi}{3} - \alpha(2) \tag{0.7}$$

$$\Longrightarrow \omega_2 = \frac{5\pi}{3} \tag{0.8}$$

Finalmente a_c cuando $t = 2[s]$, es

$$a_c = \omega_2^2 R = \left(\frac{5\pi}{3}\right)^2 \cdot 4 = \frac{100\pi^2}{9}[m/s^2] \tag{0.9}$$

Y finalmente la aceleración tangencial es

$$a_t = \alpha R = \frac{-10\pi}{12} 4 = -\frac{10\pi}{3}[m/s^2]$$

Problema 3.

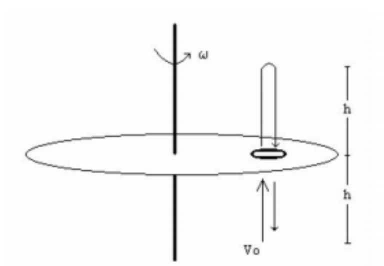
Un punto se mueve en un círculo de acuerdo a la ley $s = t^3 + 2t^2$, donde s se mide en metros a lo largo del círculo y t en segundos. Si la aceleración total del punto es $16\sqrt{2}$[m/s^{-2}] cuando $t = 2$ s, calcular el radio del círculo.

Solucionado en ayudantía

Problema 4.

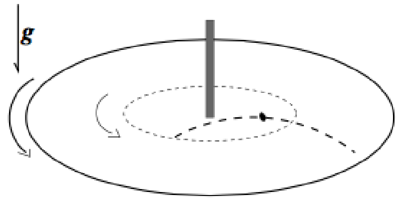
Un disco gira con velocidad angular ω desconocida. Al interior del disco hay un orificio, tal como muestra la figura. Por este orificio se hace pasar una partícula que es lanzada verticalmente hacia arriba (en presencia de la gravedad g) con velocidad inicial v_0 (también desconocida), desde h metros más abajo del disco, llegando hasta una altura h sobre el disco. Entre que pasa y vuelve a pasar el cuerpo por el agujero, el disco da una vuelta. Calcular v_0 y ω para que esto sea posible.

Solucionado en ayudantía

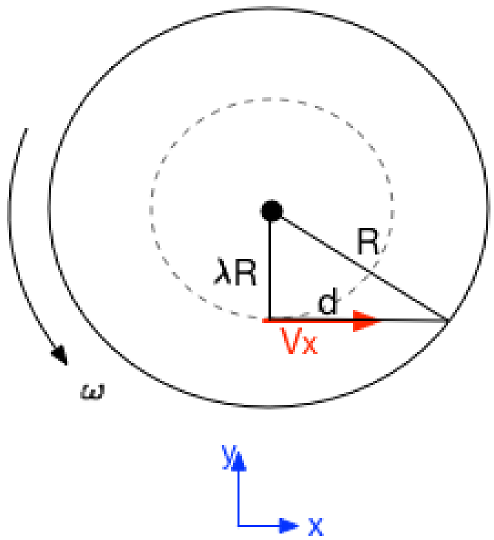


Problema 5.

Un disco de radio R dispuesto horizontalmente gira con velocidad angular constante ω en torno a un eje vertical que pasa por su centro. A una distancia λR del eje una pulga brinca con una rapidez v_0 relativa a su posición de salto y perpendicular ésta. Determine el máximo λ que garantice que la pulga no caiga fuera del disco después de su salto.



Solución:
Definimos los ejes cartesianos xy en el plano del disco como se puede ver en la figura de abajo.



La pulga al saltar con velocidad v_0 perpendicular al plano del disco (en el eje $\hat{z}$) también experimenta una velocidad tangencial V_x (en el eje $\hat{x}$) de magnitud $Vx = \omega r$ donde $r = \lambda R$. Es decir, la velocidad de la pulga $\vec{V_p}$se puede expresar como

$$\vec{V_p} = \omega\lambda R\hat{x} + v_o\hat{z} \tag{0.10}$$

El valor máximo λ lo obtenemos cuando la pulga llega justo al borde del disco, es decir, cuando ha recorrido una distancia d. Calculemos el tiempo t_c que le toma a la pulga en ir hasta ese punto, que viene dado por

$$d = V_x t_c \Longrightarrow t_c = \frac{d}{\omega\lambda R} \tag{0.11}$$

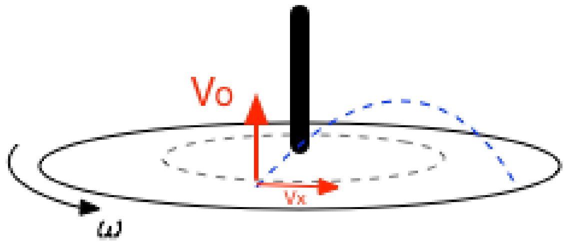
Ahora bien, por otro lado, calculemos el tiempo que le toma a la pulga en subir y bajar, que es el mismo que le tomó a la pulga en recorreder d, es decir, t_c. En este caso la velocidad inicial en el eje $\hat{z}$ es v_0 (ver figura de abajo), por lo que con la ecuación de itinerario tenemos

$$Z_f = Z_i + v_o t_c - \frac{1}{2}g t_c^2, \tag{0.12}$$

$$\tag{0.13}$$

Si dejamos nuestro **cero** del sistema de referencia en el plano del disco, tenemos que $Z_i = 0$ y que $Z_f = 0$, es decir, que inicialmente escape del disco, y que al final llegue nuevamente al disco. Entonces, imponiendo lo anterior en la ecuación (0.12), tenemos que el tiempo t_c es

$$t_c = \frac{2v_0}{g} \tag{0.14}$$



Igualando los dos tiempos que obtuvimos, tenemos que

$$\frac{2v_0}{g} = \frac{d}{\omega\lambda R} \tag{0.15}$$

Pero de la primera figura, deducimos que

$$\begin{aligned} d^2 &= R^2 - (\lambda R)^2 & (0.16) \\ d &= R\sqrt{1-\lambda^2} & (0.17) \end{aligned}$$

Luego la ecuación (0.15), queda

$$\frac{2v_0}{g} = \frac{R\sqrt{1-\lambda^2}}{\omega\lambda R} \tag{0.18}$$

Despejando λ tenemos que el valor máximo que puede tener es

$$\lambda = \sqrt{\frac{g^2}{g^2 + 4v_0^2\omega^2}}$$