Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2019

Control 11
Límites
19/06/2019

Nombre: ____________________ **Curso:** __________

Elija sólo uno de los problemas que se presentan a continuación.
Duración: 20 minutos.

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)\sqrt{10-x}}{2(x^3-1)}, & \text{si } x < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = 1 \\[2ex] \dfrac{x^3-4x^2+11x-8}{12(x-1)}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcule (si existe) el valor de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Solución: Para demostrar que tal límite existe, utilizaremos límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-4x^2+11x-8}{12(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2-3x+8)}{12(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x+8}{12} = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\text{2,5 puntos.}}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\sqrt{10-x}}{2(x^3-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\sqrt{10-x}}{2(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{10-x}}{2(x^2+x+1)} = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\text{2,5 puntos.}}$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe, y además, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

2. Determine el valor de la siguiente expresión

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3-1}{\sqrt{2x+2}-2}+\frac{10x^3-26x^2+22x-6}{(x-1)^2}\right].$$

Solución: Para calcular el valor de esta expresión, primero calcularemos los siguientes lìmites:

a) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3-1}{\sqrt{2x+2}-2}\right]$

b) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{10x^3-26x^2+22x-6}{(x-1)^2}\right]$

a) $$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3-1}{\sqrt{2x+2}-2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{\sqrt{2x+2}-2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{2x+2}+2)}{2(x-1)}\right]$$
$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x^2+x+1)(\sqrt{2x+2}+2)}{2}\right]=6.$$

$$\boxed{2{,}5 \text{ puntos.}}$$

b) $$\lim_{x\to 1}\left[\frac{10x^3-26x^2+22x-6}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{2(x-1)^2(5x-3))}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to 1}2(5x-3)=4.$$

$$\boxed{2{,}5 \text{ puntos.}}$$

Utilizando álgebra de límites, ya que ambos límites existen, obtenemos

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3-1}{\sqrt{2x+2}-2}+\frac{10x^3-26x^2+22x-6}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3-1}{\sqrt{2x+2}-2}\right]+\lim_{x\to 1}\left[\frac{10x^3-26x^2+22x-6}{(x-1)^2}\right]$$
$$=6+4=10.$$

$$\boxed{1 \text{ punto.}}$$