Taller 2:

$\boxed{P1}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = (x - \sqrt{3})^2 - 1$

$f'(x) = 2(x - \sqrt{3})$

$f'(x_0) = 2\left(\frac{11\sqrt{3}}{12} - \sqrt{3}\right) = \cancel{2} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{\cancel{12}_6} = \frac{-\sqrt{3}}{6}$

$f'(x_1) = 2(2\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

Perpendicularidad:

$f'(x_0) \cdot f'(x_1) = \frac{-\sqrt{3}}{\cancel{6}_3} \cdot \cancel{2}\cancel{\sqrt{3}}^{3} = \frac{-3}{3} = -1$ $\therefore$ son perpendiculares.

ecuaciones:

Recuerdo: la ecuación de la recta tangente a f en $x = a$ viene dada por:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\Longleftrightarrow y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$\therefore$ Tangente en $x = x_0$.

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{6}\left(x - \frac{11\sqrt{3}}{12}\right) + \left[\left(\frac{11\sqrt{3}}{12} - \sqrt{3}\right)^2 - 1\right]$$

Tangente en $x = x_1$

$$y = 2\sqrt{3}(x - 2\sqrt{3}) + \left[(2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 - 1\right]$$

P2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \text{sen}(x)\cos(x)$

OBS: podemos reescribir f como sigue

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{sen}(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\text{sen}(2x)$$

Así, derivar es más sencillo.

(i) $f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}\cos(2x)\cdot\cancel{2} = \cos(2x)$

$$f'(\pi/6) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Luego, la recta tangente viene dada por:

$$y = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + f(\pi/6)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\sqrt{3}/2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(ii)

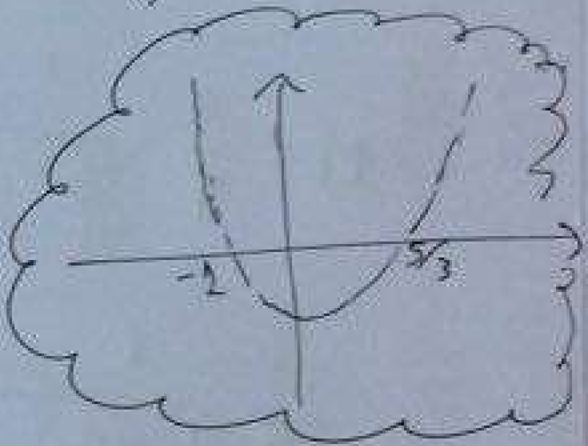
$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,42$$

P3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 6$

a) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 5 \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3 \cdot 5}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6}$$

$$x_1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \quad \Big| \quad x_2 = \frac{-6}{6} = -1$$



b) $\therefore f'(x) = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)(x + 1)$

$A =]-\infty, -1[\cup]5/3, \infty[$

c) $H =]-1, 5/3[$

d) - f creciente en $]-\infty, -1]$ y en $[\frac{5}{3}, \infty[$

- f decreciente en $[-1, 5/3]$.

candidatos a max/min: $x = -1$ y $x = 5/3$

- ya que f es creciente antes de -1 y decreciente después,  concluimos que $x = -1$ es maximo.

- Análogamente, para $x = 5/3$,  concluimos que es minimo.

P4) $f:]1,\infty[\to [0,+\infty[$ por $f(t) = \sqrt[4]{\dfrac{t^3+1}{t^3-1}}$

a) (i) $\lim\limits_{t\to 1^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} \sqrt[4]{\dfrac{t^3+1}{t^3-1}} = \lim\limits_{t\to 1^+} \sqrt[4]{\dfrac{t^3+1}{(t-1)(t^2+t+1)}} = \infty$

$(\oplus \to 0)$

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \sqrt[4]{\dfrac{t^3+1}{t^3-1}} = \lim\limits_{t\to\infty} \sqrt[4]{\dfrac{1+1/t^3}{1-1/t^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{1}} = 1.$

b) $f'(t) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{t^3+1}{t^3-1}\right)^3}} \cdot \dfrac{3t^2(t^3-1) - 3t^2(t^3+1)}{(t^3-1)^2}$

$= \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{t^3+1}{t^3-1}\right)^3}} \cdot \dfrac{3t^2(-2)}{(t^3-1)^2}$ $\therefore f'(t) < 0$ $\forall t \in \mathrm{Dom}(f).$

luego, f decreciente en todo su dominio.

c) En mate 1 (ayudantía 9) demostramos que

f estrictamente creciente (decreciente) $\Rightarrow f$ inyectiva.

luego, ya que $f'(t) < 0$, f es estrictamente decreciente y por lo tanto inyectiva.

d) Por los límites de (a) y la monotonía, deducimos que $\mathrm{Im}(f) =]-\infty, 1[\neq \mathrm{cod}(f)$.

luego, f no epiyectiva.