Ayudantía 4
(22/08/2019)

P1| Obtener las ecuaciones de las rectas tangentes y normal a la curva

$$\sqrt{3x^2y^3+2x^2-y}=4+2x$$

en el punto $(-1,1)$.

Sol: Para resolver lo pedido, debemos derivar implícitamente c/r a x, así:

$$\frac{1}{2\sqrt{3x^2y^3+2x^2-y}}\cdot(3x^2y^3+2x^2-y)'=2 \quad \text{/ aquí derivamos la curva}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{3x^2y^3+2x^2-y}}\cdot(6xy^3+3x^2\cdot 3y^2\cdot y'+4x-y')=2$$

$$\Leftrightarrow 6xy^3+9x^2y^2\cdot y'+4x-y'=4\sqrt{3x^2y^3+2x^2-y}$$

$$\Leftrightarrow y'(9x^2y^2-1)+6xy^3+4x=4\sqrt{3x^2y^3+2x^2-y}$$

$$\Leftrightarrow y'(9x^2y^2-1)=4\sqrt{3x^2y^3+2x^2-y}-6xy^3-4x$$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{4\sqrt{3x^2y^3+2x^2-y}-6xy^3-4x}{9x^2y^2-1}$$

Teniendo y', ahora la evaluamos en $A=(-1,1)$:

$$y'|_A=\frac{4\sqrt{3(-1)^2(1)^3+2(-1)^2-1}-6(-1)(1)^3-4(-1)}{9(-1)^2\cdot(1)^2-1}$$

$$=\frac{4\sqrt{3+2-1}+6+4}{9-1}$$

$$=\frac{4\sqrt{4}+10}{8}$$

$$= \frac{8+10}{8}$$

$$= \frac{\cancel{18}^{\,2}}{\cancel{8}} = \frac{9}{4}$$

Recuerdo: m pendiente de recta tangente

$\Rightarrow -\frac{1}{m}$ pendiente recta normal

Así, la pendiente de la recta tangente a la curva en $(-1,1)$ es $\frac{7}{4}$ y la pendiente de la recta normal a la curva en $(-1,1)$ es $\frac{-4}{7}$

Las rectas buscadas son:

r_t: $$y-1 = \frac{9}{4}(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{9}{4}x + \frac{9}{4} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{9}{4}x + \frac{13}{4}$$

r_n: $$y-1 = \frac{-4}{9}(x+1)$$

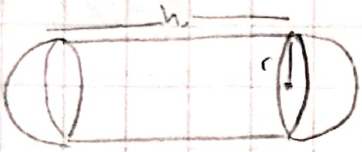
$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{-4}{9}x - \frac{4}{9} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{-4}{9}x + \frac{5}{9}$$

P2| Se desea construir un estanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por metro cuadrado en los extremos es $2P_0$ y el costo en la parte cilíndrica es P_0. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de $18\pi\ (m^3)$?

Hint: El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y su superficie es $4\pi r^2$.

Sol:



Queremos hallar r y h para MINIMIZAR el costo de producción, para eso debemos obtener la superficie del estanque y usar que el costo por metro cuadrado de los extremos es $2P_0$ y en la parte cilíndrica es P_0.

$\Rightarrow$ El costo de producir los extremos es: (Superficie extremos)$\cdot 2P_0$

El costo de producir la parte cilíndrica es: (Superficie parte cilíndrica)$\cdot P_0$

donde: 1) Superficie extremos $= 4\pi r^2$

2) Superficie parte cilíndrica $= 2\pi r h$

Así, el costo total de producción es:

$$C = 4\pi r^2 \cdot 2P_0 + 2\pi r h \cdot P_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C = 8\pi r^2 P_0 + 2\pi r h P_0} \qquad (\star)$$

Esta es la función que queremos minimizar. Como depende de dos variables, encontraremos una relación entre r y h. y así poder minimizarla

Nos dicen que la capacidad deseada de volumen del estanque es 18π donde:

$$V_{estanque} = 2V_{semiesf} + V_{cilindro}$$

y $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$, $V_{cilindro} = \pi r^2 h$.

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \quad 18\cancel{\pi} = \frac{4}{3}\cancel{\pi} r^3 + \cancel{\pi} r^2 h$$

$$\Rightarrow \quad 18 - \frac{4}{3} r^3 = r^2 h$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{18}{r^2} - \frac{4r}{3}} \qquad (*)$$

Reemplazando $(*)$ en $(\star)$:

$$C(r) = 8\pi r^2 P_0 + 2\pi r\left(\frac{18}{r^2} - \frac{4r}{3}\right) P_0$$

$$= 2\pi P_0\left(4r^2 + \frac{18}{r} - \frac{4r^2}{3}\right)$$

$$= 2\pi P_0\left(\frac{8r^2}{3} + \frac{18}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \quad C(r) = 2\pi P_0\left(\frac{8r^2}{3} + \frac{18}{r}\right)$$

Calculemos $C'(r)$ y $C''(r)$:

- $C'(r) = 2\pi P_0\left(\frac{16r}{3} - \frac{18}{r^2}\right)$
- $C''(r) = 2\pi P_0\left(\frac{16}{3} + \frac{36}{r^3}\right) > 0, \ \forall r > 0$

y $C'(r) = 0 \iff 2\pi P_0\left(\frac{16r}{3} - \frac{18}{r^2}\right) = 0$

$$\iff \frac{\cancel{16}^{\,8} r}{3} = \frac{\cancel{18}^{\,9}}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{3}{2}$$

Como $C''(r) > 0$, $\forall r > 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$ es un MÍNIMO de C

$$y \quad h_{mín} = \frac{18}{(3/2)^2} - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{18}{\left(\frac{9}{4}\right)} - 2$$

$$= \frac{\cancel{18}^{2} \cdot 4}{\cancel{9}} - 2$$

$$= 8 - 2$$

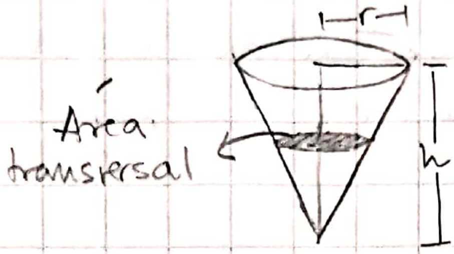
$$= 6$$

Así, las dimensiones del estanque que minimizan el costo son:

$$r = 3/2 \quad y \quad h = 6 \quad \text{en } [m]$$

P3] De un estanque con forma de cono invertido se está extrayendo agua a razón de 75π (cm^3/min) y simultáneamente se está vertiendo agua a él a razón constante 750π (cm^3/min). La altura y radio del estanque son 200 y 100 cm, respectivamente. Determine la razón con la que varía el área transversal del cono de agua respecto del tiempo, en el momento en que su radio está aumentando a razón de 15 (cm/min)

Sol: El estanque tiene la forma siguiente:



Considere: M = cantidad de agua que entra al estanque en $[cm^3]$
N = cantidad de agua que sale del estanque en $[cm^3]$
V = cantidad de agua alojada en el estanque en $[cm^3]$

Con esto, se tiene la relación: $V = M - N$

Por enunciado, se sabe que la razón de cambio (o derivada) con respecto al tiempo de M y N es:

$$\frac{dM}{dt} = 750\pi \quad y \quad \frac{dN}{dt} = 75\pi$$

luego $\frac{dV}{dt} = \frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dt} = 750\pi - 75\pi = 675\pi$ (*)

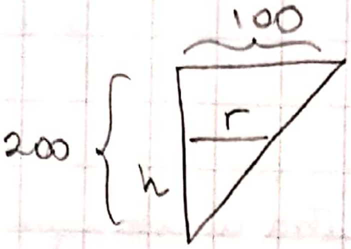
donde $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (volumen del estanque en cm^3) (**)

Note que $A_T = \pi r^2$ (área transversal del estanque) y buscamos conocer el valor de:

$$\boxed{\frac{dA_T}{dt} = \pi 2r \cdot \frac{dr}{dt}}$$

JUSTO cuando $\frac{dr}{dt} = 15$, por lo que nos faltará saber el valor de r en este caso. Para ello, usaremos (*) y (**)

Las secciones transversales del estanque son triángulos semejantes, por lo que podemos hallar una relación entre h y r:



Luego $\frac{h}{r} = \frac{200}{100} \Rightarrow \boxed{h = 2r}$

Así, podemos reescribir $(**)$ como:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 (2r) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Derivando de r a t: $\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi}{3}(3r^2)\cdot\frac{dr}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 2\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

y usando $(*)$ y que $\frac{dr}{dt} = 15$ obtenemos que:

$$675\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi} r^2 \cdot 15$$

$$\Leftrightarrow \frac{675}{30} = r^2 \quad | :15$$

$$\Leftrightarrow \frac{45}{2} = r^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{2} = r}$$

Así, $\frac{dA_T}{dt} = \cancel{2}\pi\left(\frac{3\sqrt{10}}{\cancel{2}}\right)\cdot 15 = 45\sqrt{10}\,\pi \left[\frac{cm^2}{min}\right]$