Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2019

Taller de ayudantía 5
Sumatorias e inducción

28/08/2019

En este taller, Utilizaremos el símbolo Σ para denotar la suma de los n primeros términos consecutivos a partir del i-ésimo término de una sucesión. Además, calcularemos expresiones de este tipo, utilizando sumas conocidas (vistas en cátedra). Finalmente, aplicaremos el principio de inducción para demostrar algunas fórmulas que son válidas para todo número natural.

Objetivos:

- Aplicar el símbolo de sumatoria para abreviar sumas de términos que se rigen por una fórmula.
- Calcular expresiones que involucran el símbolo Σ, utilizando sumas conocidas.
- Aplicar sumas conocidas en un ejercicio contextualizado.
- Aplicar el principio de inducción para demostrar que ciertas afirmaciones son ciertas para todo número natural.

Ejercicios Propuestos

1. Use el símbolo Σ para abreviar las siguientes sumas y calcule su valor

   a) $(1^3 - 3\cdot 1) + (2^3 - 3\cdot 2) + (3^3 - 3\cdot 3) + (4^3 - 3\cdot 4) + \cdots + (2019^3 - 3\cdot 2019)$.

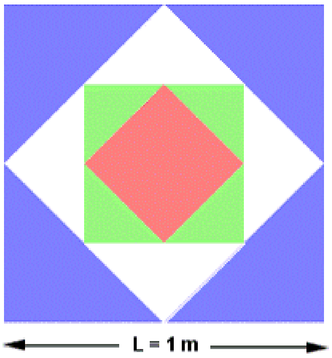
   b) $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \cdots + 29^3$.

   c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} + \cdots + \dfrac{1}{100(100+1)}$.

2. Calcule el valor de las siguiente expresión

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{n+2} + 6i\left(i+\frac{1}{3}\right)\right) - \sum_{i=3}^{2n+4} n.$$

3. Dado un cuadrado de un metro de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar el mismo proceso, y así sucesivamente.



a) Escribe la sucesión formada por la longitud del cuadrado que se obtiene al hacer el proceso mencionado n veces.

b) Escribe la sucesión formada por las áreas.

c) Calcula la suma de las áreas de los primeros n cuadrados generados de esta forma.

4. Demuestre la siguiente igualdad, utilizando el principio de inducción

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Ejercicios opcionales

1. Sabiendo que $n > 2$ calcule el valor de la siguiente expresión

$$\sum_{i=0}^{n-1}[(i+1)^3 - 2(i+1)] + \sum_{k=1}^{n+1}[k^2 - 2^k] + \sum_{i=3}^{n+3} n.$$

2. Demuestre utilizando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

El propósito del cálculo no son los números sino el entendimiento.