Ayudantía 14
19/12/2019

P1) Analice la convergencia de las siguientes series, en caso de converger, determine su valor.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

Sol: Notamos primero que la serie da indicios de ser telescópica

Sabemos que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \lim_{L\to+\infty} \sum_{n=1}^{L} \underbrace{\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}}_{(*)}$$

Analicemos el límite, pero primero usemos fracciones parciales sobre (*).

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{A}{(3n-1)} + \frac{B}{(3n+2)}$$
$$= \frac{A(3n+2) + B(3n-1)}{(3n-1)(3n+2)}$$

Si $n=-2/3$: $1 = B(3\cdot -2/3 - 1)$
$= B(-3) \Rightarrow B = -1/3$

Si $n = 1/3$: $1 = A(3\cdot 1/3 + 2)$
$= A(3) \Rightarrow A = 1/3$

Luego $\sum_{n=1}^{L} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \sum_{n=1}^{L} \frac{1/3}{(3n-1)} - \frac{1/3}{(3n+2)}$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{L} \frac{1}{(3n-1)} - \frac{1}{(3n+2)}$$

Considere $a_n = \frac{1}{(3n-1)}$ luego $a_{n+1} = \frac{1}{(3(n+1)-1)} = \frac{1}{(3n+2)}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{L} \frac{1}{(3n-1)} - \frac{1}{(3n+2)}$ es una suma telescópica

Así, $\sum_{n=1}^{L} \frac{1}{(3n-1)} - \frac{1}{(3n+2)} = \sum_{n=1}^{L} a_n - a_{n+1}$

$$= a_1 - a_{L+1}$$

$$= \frac{1}{(3 \cdot 1 - 1)} - \frac{1}{(3 \cdot L + 2)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(3L+2)}$$

$$\therefore \lim_{L \to +\infty} \sum_{n=1}^{L} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \lim_{L \to +\infty} \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{(3L+2)} \right\}$$

$$= \lim_{L \to +\infty} \frac{1}{6} - \cancel{\frac{1/3}{(3L+2)}} \; 0$$

$$= \frac{1}{6}$$

Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ CONVERGE y vale $1/6$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10 \cdot 2^n + 5 \cdot (-3)^n}{20 \cdot 3^n}$.

• Criterio término general: Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ no existe

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ diverge

Analicemos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ con $a_n = \dfrac{2\cdot 2^n + (-3)^n}{4\cdot 3^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 2^n + (-3)^n}{4\cdot 3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 2^n}{4\cdot 3^n} + \frac{(-3)^n}{4\cdot 3^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \underbrace{\frac{(-1)^n}{4}}_{\text{diverge}}$$

pues $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ diverge $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0\right)$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ NO existe

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\cdot 2^n + (-3)^n}{4\cdot 3^n}$ DIVERGE

P2) Aplique algún criterio para establecer si las siguientes series convergen.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

• Criterio integral: Si $f(x) > 0$ decreciente si $x \geq n_0$ entonces

$\sum\limits_{n\geq n_0} f(n)$ $\underset{\text{diverge}}{\text{converge}}$ $\Leftrightarrow$ $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ $\underset{\text{diverge}}{\text{converge}}$

Sol: Sea $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$

Note que si $x \geq 1$, $f(x) > 0$, pues $x+1 > 0$ y $\ln(x+1) > 0$

Por otro lado:

Si $x \geq 1$, $\ln(x+2) \geq \ln(x+1) > 0$ / ln es creciente

$\Rightarrow \sqrt{\ln(x+2)} \geq \sqrt{\ln(x+1)} > 0$

$\Rightarrow (x+2)\sqrt{\ln(x+2)} \geq (x+1)\sqrt{\ln(x+1)} > 0$ / $(x+2), (x+1) > 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}} \leq \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$ / pues los términos son > 0

$\therefore$ $f(x) \geq f(x+1)$ si $x \geq 1$

$\therefore$ f decreciente en $[1, +\infty)$

Ahora, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}} = \lim_{L\to+\infty} \int_1^{L} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$

CV: $u = \ln(x+1)$

$du = \dfrac{dx}{x+1}$

si $x = 1 \to u = \ln(2)$

si $x = L \to u = \ln(L+1)$

$$= \lim_{L\to+\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(L+1)} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \lim_{L\to+\infty} 2\sqrt{u}\,\Big|_{\ln(2)}^{\ln(L+1)}$$

$$= \lim_{L\to+\infty} 2\sqrt{\ln(L+1)} - 2\sqrt{\ln(2)}$$

$$= 2\sqrt{\lim_{L\to+\infty} \ln(L+1)} - 2\sqrt{\ln(2)}$$

$= +\infty$, pues $\sqrt{\cdot}$ es continua por ende límite entra

$\left\{ \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \right.$

$\therefore$ Por criterio integral, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ DIVERGE

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

• Criterio del cociente: Sea $\sum_{n \geq n_0} a_n$ serie, entonces si

$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$ se tiene que $\begin{cases} r < 1 \Rightarrow \text{serie converge} \\ r > 1 \ (o\ r = \infty) \Rightarrow \text{serie diverge} \\ r = 1 \ \text{criterio no decide} \end{cases}$

Sol: Sea $a_n = \frac{n^3}{2^n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(n+1)^3}{\cancel{2^{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n^3} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{2} \frac{(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{n^3} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\cancel{n^3}(1 + 3/n + 3/n^2 + 1/n^3)}{\cancel{n^3}} \right|$$

$$= \frac{1}{2}$$

y $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ por criterio del cociente la serie CONVERGE

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$

Sol: Igual que en b), sea $a_n = \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+2)^2}{(n+3)!}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+1)^2}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2+4n+4}{(n+3)\cdot\cancel{(n+2)!}}\cdot\frac{\cancel{(n+2)!}}{n^2+2n+1}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2+4n+4}{n^3+2n^2+n+3n^2+6n+3}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2+4n+4}{n^3+5n^2+7n+3}\right|$$

$$= 0$$

y $0<1 \Rightarrow$ por criterio del cuociente la serie CONVERGE.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\cdot\frac{n}{n^2+1}$

Sol: Al igual que en b) y c), sea $a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{n}{n^2+1}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\cancel{(-1)^{n+1}}}{\cancel{2^{n+1}}}\cdot\frac{n+1}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{\cancel{2^n}}{\cancel{(-1)^n}}\cdot\frac{n^2+1}{n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-1}{2}\cdot\frac{n+1}{n^2+2n+2}\cdot\frac{n^2+1}{n}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\cancel{n^3}(1+1/n+1/n^2+1/n^3)}{\cancel{n^3}(1+2/n+2/n^2)}\right|$$

$$= \frac{1}{2}$$

y $\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ por criterio del cuociente la serie CONVERGE

P3| Encuentre el conjunto de nº reales x para los cuales la serie dada converge.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^{2n}}$

· Recuerdo Sea una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. El radio de convergencia es $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ o $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$

y la serie converge si $|x-c| < R$

Sol: La serie es de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-(-3))^n}{2^{2n}}$$

Nos piden el intervalo de convergencia
Entonces:

· Forma 1: Sabemos que si $L<1$, la serie converge con

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \quad \text{con} \quad b_n = \frac{(x+3)^n}{2^{2n}}$$

Así, $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(x+3)^{n+1}}{2^{2(n+1)}} \cdot \frac{2^{2n}}{(x+3)^n}\right|$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(x+3)}{4}\right|$$

$$= \frac{|x+3|}{4}$$

luego serie converge si $\left|\frac{x+3}{4}\right| < 1 \iff |x+3| < 4$

$\iff -4 < x+3 < 4$

$\iff -7 < x < 1$

$\therefore$ Intervalo de convergencia es $(-7, 1)$

¿Y los extremos?

Si $x=-7$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-7+3)^n}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{2^{2n}}$

$\displaystyle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{4^n}}{\cancel{4^n}}$

$\displaystyle = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ alternante (oscila)

Si $x=1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+3)^n}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{4^n}$

$\displaystyle = \sum_{n=0}^{+\infty} 1^n$ diverge

- Forma 2: $\displaystyle\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$\displaystyle = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{2^{2(n+1)}} \cdot \frac{2^{2n}}{1}\right|$

$\displaystyle = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\cancel{2^{2n}}}{\cancel{2^{2n}} \cdot 4}\right|$

$\displaystyle = \frac{1}{4}$

$\therefore R = 4$

$\therefore$ Serie converge si $|x+3| < 4 \iff x \in (-7, 1)$ //

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{(3n)!}$

Sol: Usemos forma 2

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{con } a_n = \frac{n!}{(3n)!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)!}{(3(n+1))!} \cdot \frac{(3n)!}{n!} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)\cancel{n!} \cdot \cancel{(3n)!}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cdot\cancel{(3n)!}\,\cancel{n!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n+1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \right|$$

$$= 0$$

$\therefore R = +\infty$

$\therefore$ La serie converge $\forall x$