P1 (a) $|x-8| \leq \dfrac{8}{x-2}$ R: $x \neq 2$

nota: Podemos asumir $\dfrac{8}{x-2} \geq 0 \Rightarrow x-2>0$ $\Rightarrow x>2$ puesto que los x que hacen $\dfrac{8}{x-2} < 0$ no son solución.

Bajo este supuesto, podemos multiplicar:

$$|x-8| \leq \frac{8}{x-2} \quad / \cdot (x-2) \ (>0)$$

$$\Leftrightarrow |x-8|(x-2) \leq 8 \quad / \ (x-2) = |x-2|$$

$$\Leftrightarrow |x-8||x-2| \leq 8 \quad / \ |a||b| = |ab|$$

$$\Leftrightarrow |(x-8)(x-2)| \leq 8$$

$$\Leftrightarrow |x^2-10x+16| \leq 8 \quad / \ |A| \leq b \Leftrightarrow -b \leq A \leq b$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq x^2-10x+16 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq (x^2-10x+25)+16-25 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq (x-5)^2 - 9 \leq 8 \quad / +9$$

$$\Leftrightarrow \underline{0 <} 1 \leq (x-5)^2 \leq 17 \quad / \sqrt{\ }$$

$\Leftrightarrow 1 \le \sqrt{(x-5)^2} \le \sqrt{17}$

$\Leftrightarrow 1 \overset{①}{\le} |x-5| \overset{②}{\le} \sqrt{17}$

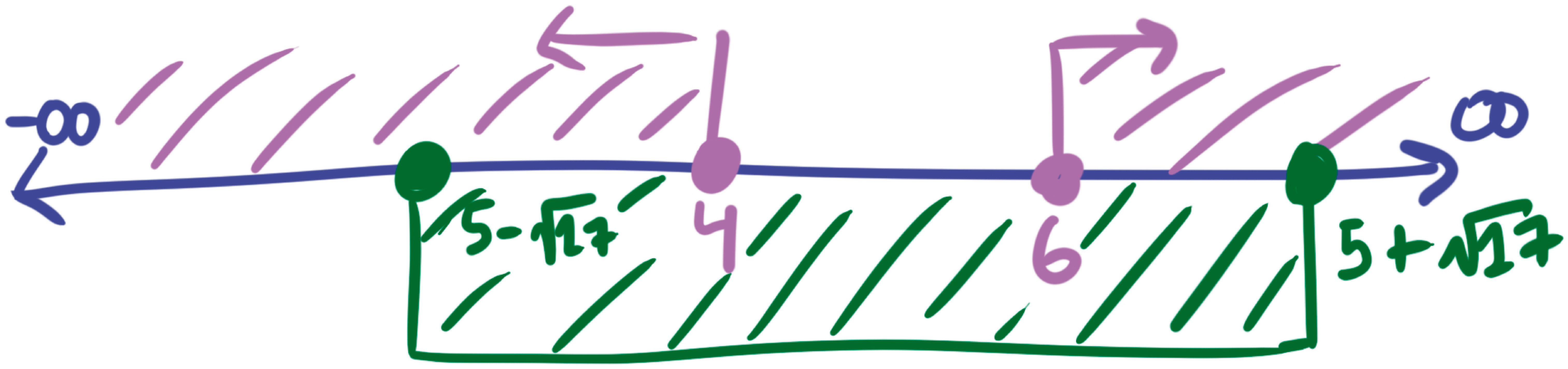
① $1 \le |x-5| \rightsquigarrow x \in \left]-\infty, 4\right] \cup \left[6, \infty\right[$

② $|x-5| \le \sqrt{17} \rightsquigarrow -\sqrt{17} \le x-5 \le \sqrt{17}$

$5-\sqrt{17} \le x \le 5+\sqrt{17}$

$\Rightarrow x \in [5-\sqrt{17}, 5+\sqrt{17}]$

Intersectando:



$x \in [5-\sqrt{17}, 4] \cup [6, 5+\sqrt{17}]$

Pero supomíamos $x > 2$! y $5-\sqrt{17} < 2$.
De modo que la sol. final es

$S = \left]2, 4\right] \cup [6, 5+\sqrt{17}]$

$C.S(S) = \left[5+\sqrt{17}, \infty\right[$, $C.I(S) = \left]-\infty, 2\right]$

$\sup(S) = 5+\sqrt{17}$, $\inf(S) = 2$, $\max(S) = 5+\sqrt{17}$

$\min(S) \nexists$

P2 (a) $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ div $x^2 + x + 1$.

Dividamos

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + ax^2 + bx + 5) : (x^2 + x + 1) = x + (a-1) \\
-(x^3 + x^2 + x) \\
\quad 0 + (a-1)x^2 + (b-1)x + 5 \\
\quad -((a-1)x^2 + (a-1)x + (a-1)) \\
\qquad 0 + [(b-1) - (a-1)]x + 5 + (1-a) \\
\qquad = (b-a)x + 5 + (1-a) \overset{!}{=} 0
\end{array}
$$

↳ Para todo x!

(1) $b - a = 0$

(2) $6 - a = 0 \rightarrow \underline{a = 6} \overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{b = 6}$

b) $P(x) = ax^2 + bx + 4$ div $x + 2$

Dividiendo:

$$
\begin{array}{l}
(ax^2 + bx + 4) : (x + 2) = ax + (b - 2a) \\
-(ax^2 + 2ax) \\
\quad 0 + (b-2a)x + 4 \\
\quad -((b-2a)x + 2(b-2a)) \\
\qquad 0 + 4 - 2(b-2a) = 4 - 2b + 2a \overset{!}{=} 0
\end{array}
$$

(1)

Resto para $(x+1)$:

$$
\begin{array}{l}
ax^2+bx+4:(x+1)=ax+(b-a)\\
-(ax^2+ax)\\
\hline
0+(b-a)x+4\\
\quad -((b-a)x+(b-a))\\
\hline
\quad 0 \quad +4-(b-a)
\end{array}
$$

Resto para $x+3$:

$$
\begin{array}{l}
ax^2+bx+4:(x+3)=ax+(b-3a)\\
-(ax^2+3ax)\\
\hline
0 \quad +(b-3a)x+4\\
\quad -((b-3a)x+3(b-3a))\\
\hline
\quad 0 \quad +4-3(b-3a)
\end{array}
$$

Deben ser iguales: $4-(b-a)=4-3(b-3a)$

$\Leftrightarrow b-a=3(b-3a) \Leftrightarrow b-a=3b-9a$

$\Leftrightarrow 8a=2b \Leftrightarrow 4a=b$

en (1): $4-2(4a)+2a=0 \Leftrightarrow 4-6a=0$

$\Leftrightarrow a=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \Rightarrow b=4a=\frac{8}{3}$

P3 • $P(x)$ de grado 3:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

• $P(x)$ mónico: $(a=1)$

$$P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

• $(x-2)$ factor $\Rightarrow P(x) = q(x)(x-2)$

$\Rightarrow P(2) = 0$

$$2^3 + b \cdot 2^2 + c2 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + 4b + 2c + d = 0 \quad (1)$$

• $(x-5)$ factor $\Rightarrow P(x) = r(x)(x-5)$

$\Rightarrow P(5) = 0$

$$125 + 25b + 5c + d = 0 \quad (2)$$

• $P(x) : (x+4)$ da resto -54

$\Rightarrow P(x) = S(x)(x+4) - 54$

$\rightarrow P(-4) = -54$

$$-64 + 16b - 4c + d = -54$$

$$\Leftrightarrow 16b - 4c + d = 10 \quad (3)$$

(1) $4b+2c+d=-8$ $\div 3$ (2)−(1) $21b+3c=-117$

(2) $25b+5c+d=-125$ $\rightsquigarrow$ (3)−(1) $12b-6c=18$

(3) $16b-4c+d=10$ $\div 6$

$\Leftrightarrow$ (2)−(1) $7b+c=39$ $\xrightarrow{(+)}$ $9b=42 \Rightarrow 3b=14$

(3)−(1) $2b-c=3$ $\Rightarrow \boxed{b=14/3}$

Luego: $2\cdot\frac{14}{3}-c=3$

$\Leftrightarrow \frac{28}{3}-3=c \Leftrightarrow \boxed{c=\frac{19}{3}}$

en (1): $4\cdot\frac{14}{3}+2\cdot\frac{19}{3}+d=-8$

$\Leftrightarrow d=-\frac{56}{3}-\frac{38}{3}-\frac{24}{3} \Leftrightarrow \boxed{d=\frac{-118}{3}}$

Así:

$$P(x)=x^3+\frac{14}{3}x^2+\frac{19}{3}x-\frac{118}{3}$$ //

P4 $T(x)=10x^3+30x^2-100x-240$

Encontraremos los ceros de $T(x)$

nota: $T(x)=10(x^3+3x^2-10x-24)$

Posibles raíces racionales: $\frac{p}{q}$ donde $p \mid -24$ y $q \mid 1$. Es decir

$\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm24\}$

con $x=-2$

$$T(-2)=10(-8+12+20-24)=10(32-32)=0$$

$\Rightarrow (x+2)$ divide a $T(x)$

$$(x^3+3x^2-10x-24):(x+2)=x^2+x-12$$

$-(x^3+2x^2)$

$0+x^2-10x$

$-(x^2+2x)$

$0 \quad -12x-24$

$-(-12x-24)$

0

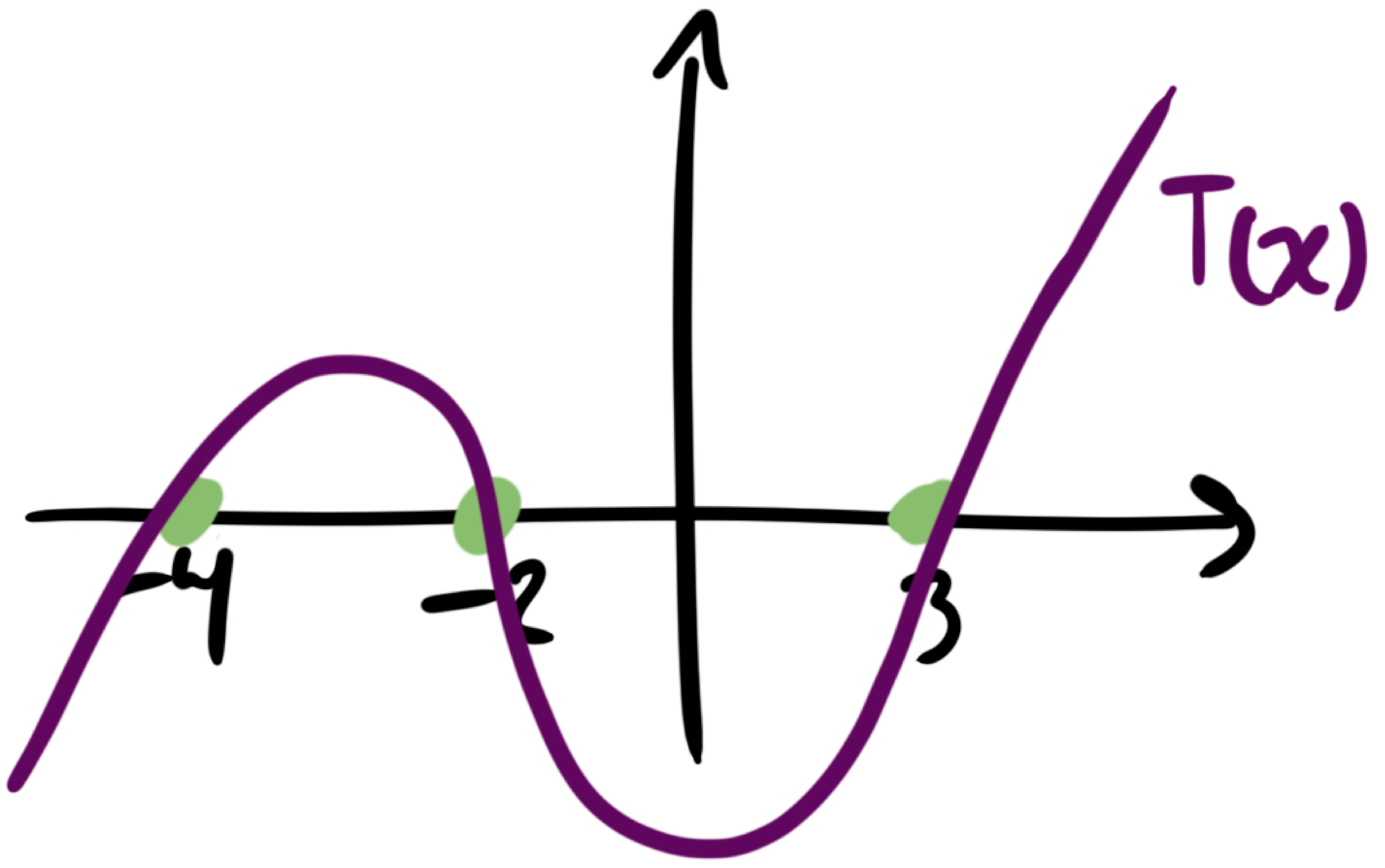
$(x+4)(x-3)$

$$\Rightarrow T(x)=10(x^3+3x^2-10x-24)=10(x+2)(x^2+x-12)$$

$$=10(x+2)(x+4)(x-3)$$

PC: $x=-2$ | $x=-4$ | $x=3$

	$-\infty$ a -4	-4 a -2	-2 a 3	3 a ∞
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$



Ya que x es positivo por el problema, la mínima cantidad para que $T(x)$ sea positivo es $x=4$