

Ejercicio resuelto 2

1.- Demuestre que el área de un paralelogramo de lados u y v en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ está dada por $\|u \times v\|$.

Solución. Para demostrar este resultado primero veremos algunas proposiciones;

- **Definición:** El ángulo entre u y v está dado por la condición

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \quad (\implies u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta).$$

- **Proposición 1:** Para todo $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ se cumple que

$$(u \cdot v)^2 + \|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Dem: Calcularemos cada uno de los elementos por separado por sus definiciones (recordar que $\|u\|^2 = u \cdot u$):

$$\begin{aligned}(u \cdot v)^2 &= (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \\ &= u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2 + 2u_1 v_1 u_3 v_3 + 2u_3 v_3 u_2 v_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u \times v\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\ &= u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_2^2 - 2u_3 v_3 u_2 v_2 + u_3^2 v_1^2 + u_1^2 v_3^2 - 2u_1 v_1 u_3 v_3 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u\|^2 \|v\|^2 &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ &= u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2.\end{aligned}$$

De estos cálculos podemos ver que si efectuamos la suma efectivamente se cumple que $(u \cdot v)^2 + \|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.

- **Proposición 2:** Para todo $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ se tiene que

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta .$$

Dem:

$$\begin{aligned} \|u \times v\|^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 - (\|u\| \|v\| \cos \theta)^2 \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta , \end{aligned}$$

desde donde podemos concluir, aplicando raíz a ambos lados, que

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta = \|u\| \|v\| \sin \theta .$$

La última igualdad es cierta pues $\theta \in [0, \pi] \implies \sin \theta \geq 0$.

Podemos ahora con estos resultados plantear una muestra:

Dem 1.- Sea θ el ángulo entre u y v y A el área del paralelogramo determinado por estos vectores. Si $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, entonces $u = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo tanto $\|u \times v\| = |\lambda| \|v \times v\| = 0$. Además $A = 0$, por lo que en este caso se cumple la afirmación.

Supongamos ahora que $\theta \neq 0, \pi$, y que el paralelogramo formado por ambos vectores es como en el diagrama ¹:

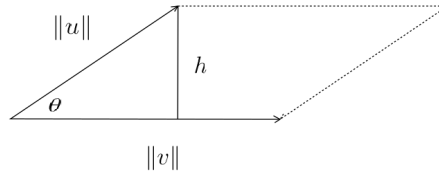


Fig. 1: Paralelogramo descrito por u y v .

El área de un paralelogramo corresponde a una base por su correspondiente altura. Consideraremos la base de largo $\|v\|$ y la altura h . Como podemos ver, aplicando trigonometría al triángulo rectángulo que se forma se tiene que

$$\sin \theta = \frac{h}{\|u\|} , \text{ es decir, } h = \|u\| \sin \theta .$$

Vemos entonces que

$$A = \|v\| h = \|v\| \|u\| \sin \theta = \|u \times v\| .$$

¹El diagrama corresponde al caso en que θ es agudo. Si θ es obtuso, el otro ángulo del paralelogramo será agudo, por lo que usamos ese ángulo, lo que equivale a utilizar el vector u como base para el cálculo, con lo que la demostración se realiza de forma totalmente análoga.