Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2020

Ejercicio resuelto 5

1. Sean $V = \mathbb{P}_2[x]$, $p_1(x) = 1 + 2x^2$, $p_2(x) = 2x$ y $p_3(x) = 1 + x$. Muestre que

$$V = \text{Gen}(p_1(x), p_2(x), p_3(x)) \ .$$

Solución. En primer lugar, $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $p_3(x) \in V$ implica que

$$\text{Gen}(p_1(x), p_2(x), p_3(x)) \subset V \ .$$

Ahora, sea $p(x) \in V$, con $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Buscamos λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} p(x) &= \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) \\ &= \lambda_1 + 2\lambda_1 x^2 + 2\lambda_2 x + \lambda_3 + \lambda_3 x \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3) + (2\lambda_2 + \lambda_3)x + 2\lambda_1 x^2 \ . \end{aligned}$$

Dos polinomios son iguales si y solo si tienen los mismos coeficientes, por lo que la igualdad anterior nos deja el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_1 + \lambda_3 \\ a_1 &= 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ a_2 &= 2\lambda_1 \ , \end{aligned}$$

donde obtenemos que $\lambda_1 = \frac{a_2}{2}$, $\lambda_3 = a_0 - \frac{a_2}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{2a_1 + a_2 - 2a_0}{4}$ (El sistema tiene solución SIEMPRE.) Esto muestra que $p(x) \in \text{Gen}(p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ (lo que también se dice que p es combinación lineal de $\{p_1, p_2, p_3\}$), es decir, $V \subset \text{Gen}(p_1(x), p_2(x), p_3(x))$. Concluímos que $V = \text{Gen}(p_1(x), p_2(x), p_3(x))$.

NOTA: Los coeficientes que encontramos son importantes, por lo que vemos si nuestros calculos están bien hechos, para lo cual hacemos la multiplicación de los coeficientes y vemos que es lo que sucede:

$$\begin{aligned} \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) &= \lambda_1 + 2\lambda_1 x^2 + 2\lambda_2 x + \lambda_3 + \lambda_3 x \\ &= \frac{a_2}{2} + a_2 x^2 + \frac{2a_1 + a_2 - 2a_0}{2} x + a_0 - \frac{a_2}{2} + (a_0 - \frac{a_2}{2})x \\ &= a_2 x^2 + a_1 x + \frac{a_2}{2} x - a_0 x + a_0 x - \frac{a_2}{2} x + \frac{a_2}{2} + a_0 - \frac{a_2}{2} \\ &= a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ . \end{aligned}$$