Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2020

Ejercicio resuelto 11

1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y considere la ecuación

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2(\alpha - 1)xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \ .$$

Determine todos los valores de α tales que la ecuación corresponde a una elipse, hipérbola o parábola.

Solución. Si $\alpha = 1$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha x^2 + \alpha y^2 + 2(\alpha - 1)xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y \\ &= x^2 + y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y \\ &= \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 1 &= \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Se ve que en este caso tenemos una circunferencia de radio 1 y centro $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
De ahora en adelante $\alpha \neq 1$. Si la cónica del enunciado la expresamos de la forma $v^T A v + g^T v = 0$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix} \ , \ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ , \ g = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \ .$$

Procedemos a diagonalizar la matriz A;

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\alpha - \lambda)^2 - (\alpha - 1)^2 \\ &= ((\alpha - \lambda) + (\alpha - 1))\,((\alpha - \lambda) - (\alpha - 1)) \\ &= ((2\alpha - 1) - \lambda)\,(1 - \lambda) \\ \Rightarrow \lambda = 1 \ , \ \lambda &= 2\alpha - 1 \ \text{ son los valores propios de } A. \end{aligned}$$

Vemos los espacios propios respectivos

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \,|\, (A - 1 \cdot I_2)v = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x = y \right\} \\ &= \text{gen}\{(1, -1)\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_{2\alpha-1} &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \,|(A-(2\alpha-1)I_2)v = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} -(\alpha-1) & \alpha-1 \\ \alpha-1 & -(\alpha-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x = y \right\} \\
&= \text{gen}\{(1,1)\}
\end{aligned}
$$

De esto tenemos la base $B' = \{(1,-1),(1,1)\}$, la cual es ortogonal pues $(1,-1)\cdot(1,1) = 0$. Si normalizamos cada vector en B' obtenemos la base ortonormal $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\}$.

Podemos ahora considerar las siguientes matrices:

$$
D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha-1 \end{pmatrix} \;,\; P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \;,
$$

las cuales son tales que $A = PDP^T$. Con esto hacemos el cambio de variables $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con el que la cónica queda de la forma deseada (sin el término xy):

$$
\begin{aligned}
0 &= v^T A v + g^T v \\
&= (x \;\; y) PDP^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-\sqrt{2} \;\; \sqrt{2}) PP^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= (\tilde{x} \;\; \tilde{y}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + (-\sqrt{2} \;\; \sqrt{2}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \\
&= \tilde{x}^2 + (2\alpha-1)\tilde{y}^2 + (-\sqrt{2} \;\; \sqrt{2}) \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \tilde{x}^2 + (2\alpha-1)\tilde{y}^2 - 2\tilde{x} \\
\Rightarrow 1 &= (\tilde{x}-1)^2 + (2\alpha-1)\tilde{y}^2
\end{aligned}
$$

Analizamos por caso los valores de α en los cuales se obtienen parábola, elipse e hipérbola respectivamente:

- Para la expresión $1 = (\tilde{x}-1)^2 + (2\alpha-1)\tilde{y}^2$ describa una parábola, como no podemos evitar que exista el término $\tilde{x}^2$ (en el sentido de que el factor que lo acompaña no depende de α), nos dice que es necesariamente $2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$. Pero si asumimos esto, entonces nos queda $1 = (\tilde{x}-1)^2$, lo que corresponde a las dos rectas verticales $x = 2$ y $x = 0$. Concluímos que no existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que dicha ecuación describa a una parábola.
- Si $\alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha - 1 > 0$, entonces tenemos

  $$
  1 = (\tilde{x}-1)^2 + \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha-1}}\right)^2}
  $$

  Ecuación correspondiente a una elipse.

- Análogamente, si $\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow -(2\alpha - 1) > 0$, tenemos la ecuación

$$1 = (\tilde{x} - 1)^2 - \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{-(2\alpha-1)}}\right)^2}$$

  Ecuación que describe a una hipérbola.