Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2021

Ejercicio resuelto 1

- Consideremos la secuencia de números definida por la recurrencia

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \ (\forall n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

  - Determine los términos f_3, f_4, f_5 y f_6.
  - Demuestre usando inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_{4n} es divisible por 3.

Solución.

- Usando la definición obtenemos que

$$\begin{aligned} f_3 &= f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2 \ , \\ f_4 &= f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3 \ , \\ f_5 &= f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5 \ , \\ f_6 &= f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8 \ . \end{aligned}$$

- Usaremos principio de inducción (P.I.) para demostrar que la afirmación
$p(n)$: existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_{4n} = 3k$, es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$;
  1. Caso base: $n = 1$. $f_4 = 3 = 3 \cdot 1$, luego, como $p(1)$ es cierta, usamos $n = 1$ como caso base.
  2. Hipótesis Inductiva (H.I.): existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_{4n} = 3k$.
  3. Tesis: Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_{4(n+1)} = 3m$.
  4. Dem. : Aplicaremos múltiples veces la definición recursiva de la sucesión;

$$\begin{aligned} f_{4(n+1)} &= f_{4n+4} \\ &= f_{4n+3} + f_{4n+2} \\ &= (f_{4n+2} + f_{4n+1}) + (f_{4n+1} + f_{4n}) \\ &= (f_{4n+1} + f_{4n}) + 2f_{4n+1} + f_{4n} \\ &= 3f_{4n+1} + 2f_{4n} \\ (H.I.) \quad &= 3(f_{4n+1} + 2k) \ . \end{aligned}$$

  Si $m = f_{4n+1} + 2k \in \mathbb{N}$, entonces $p(n+1)$ es verdadera.
  Finalmente, por P.I. tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_{4n} es divisible por 3.