Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2021

Ejercicio Reuelto 3, Posible solución Taller 1

1. Encuentre una representación como serie de potencias para las siguientes funciones y determine el intervalo de convergencia en cada caso.
   (a) $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$.
   (b) $g(x) = \frac{x}{(1-4x)^2}$.
2. Evalúe la integral indefinida $\int x^2 \ln(1+x)dx$ como una serie de potencias. ¿Cuál es su radio de convergencia?.
3. Use series de potencia para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right)$.

Considerar las siguientes series;

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \ , \quad |x| < 1 \ .$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \ , \quad |x| < 1 \ .$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} \ , \quad |x| < 1 \ .$$

$$\int f(-x)dx = \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \ , \quad |x| < 1 \ .$$

$$\sin(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

Solución. 1. (a) Primero encontramos una expresión como serie de potencias:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(1+x)^3} &= x^2 \left(\frac{1}{(1-(-x))^3} \right) \\ &= x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(-x)^{k-2} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k(k-1)x^k \ . \end{aligned}$$

Vemos ahora el intervalo de convergencia aplicando a la serie el criterio de la razón:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{k(k+1)x^{k+1}}{k(k-1)x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| \frac{k+1}{k-1} = |x| \ .$$

El criterio de la razón nos dice que siempre que ese límite sea menor a 1, entonces la serie converge, por lo tanto, la serie converge si $|x| < 1$ (equivalentemente ; $x \in (-1, 1)$). Como el criterio no decide cuando el límite es 1, vemos convergencia en esa situación, es decir, vemos los casos en que $|x| = 1$.

Caso 1 $x = -1$. Tenemos la serie (numérica)

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k(k-1)(-1)^k = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{2k} k(k-1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \ ,$$

la cual es divergente pues su término $k(k-1)$ es creciente, en particular no converge a 0. (Primer criterio de divergencia de series).

Caso 2 $x = 1$. Tenemos la serie (numérica)

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k(k-1)1^k = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k(k-1) \ ,$$

la cual es divergente pues su término $(-1)^k k(k-1)$ no es convergente a cero (en módulo es creciente, luego, por definición, no me acerco al cero).

Concluímos que $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k(k-1)x^k$ ssi $x \in (-1, 1)$.

(b) Primero encontramos una expresión como serie de potencias:

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1-4x)^2} &= x \left(\frac{1}{(1-(4x))^2} \right) \\ &= x \sum_{k=1}^{\infty} k(-4x)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-4)^{k-1} k x^k \ . \end{aligned}$$

Procedemos a buscar el intervalo de convergencia:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{4^k (k+1) x^{k+1}}{4^{k-1} k x^k} \right| = 4\,|x| \lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{k} = 4\,|x| \lim_{k \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{k}}{1} = 4|x| \ .$$

Por lo tanto la serie converge para todo $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Vemos los extremos:

Caso 1 $x = -4$. Tenemos la serie (numérica)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-4)^{k-1} k \left(-\frac{1}{4} \right)^k = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} k \ ,$$

la cual es divergente pues su término k no es convergente a cero.

Caso 2 $x = 4$. Tenemos la serie (numérica)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-4)^{k-1} k \left(\frac{1}{4} \right)^k = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \ ,$$

la cual es divergente pues el término $(-1)^{k-1}k$ no es convergente a cero (en módulo es creciente, luego, por definición, no me acerco al cero). Concluímos que $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-4)^{k-1} k x^k$ ssi $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

2. Sea $f(x) = x^2 \ln(1+x)$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \\ &= \sum \frac{(-1)^k x^{k+3}}{k+1} \\ \Rightarrow \int f(x)dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{(-1)^k x^{k+3}}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+4}}{(k+1)(k+4)} \end{aligned}$$

(Esto último corresponde a la serie de potencias de dicha integral.) Vemos su radio de convergencia;

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{k+5}}{(k+2)(k+4)}}{\frac{x^{k+4}}{(k+1)(k+3)}} \right| = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{k})(1+\frac{3}{k})}{(1+\frac{2}{k})(1+\frac{4}{k})} = |x| \ ,$$

por lo tanto su radio de convergencia es $R = 1$.

3 . Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right)$. Queremos f como serie de potencias;

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} - 1\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-2}}{(2k-1)!} - 1\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-2}}{(2k-1)!} + 1 - 1\right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-4}}{(2k-1)!} \end{aligned}$$

Vemos el radio de convergencia de esta serie:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{2k-2}}{(2k+1)!}}{\frac{x^{2k-4}}{(2k-1)!}} \right| = \left|x^2\right| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4k^2+2k} = 0 \ .$$

Como la serie converge en todo $\mathbb{R}$, podemos tomar el límite sin problemas;

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-4}}{(2k-1)!} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(-1)^3 x^0}{3!} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-4}}{(2k-1)!} \right) \\
&= -\frac{1}{6} + \lim_{x\to 0} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-4}}{(2k-1)!} \\
&= -\frac{1}{6} + 0 = -\frac{1}{6} \ .
\end{aligned}
$$

(Cada término de la última sumatoria a la que se le aplicó el límite es múltiplo de x, por lo tanto, como la serie converge, el límite es cero.)