Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2021

Ejercicio Resuelto 7

- Determine los puntos de intersección de las siguientes curvas y grafíquelos;

$$r_1 = 2\sin(\theta)\ ,\quad r_2 = 4\cos(2\theta)$$

.

Solución. Primero notamos que r_1 es una circunferencia de radio 1 y de centro $(0,1)$ (como se ve en Fig. 1) y r_2 corresponde a una rosa de 4 pétalos, cada uno de largo 4 donde

$$\begin{aligned} r_2 = 0 \Rightarrow & \cos(2\theta) = 0 \\ \Rightarrow & 2\theta = \frac{\pi}{2} \ \text{ ó } \ 2\theta = \frac{3\pi}{2} \\ \Rightarrow & \theta = \frac{\pi}{4} \ \text{ ó } \ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Esto nos dice que las rectas $y = x$, $y = -x$ son como en Fig. 1.

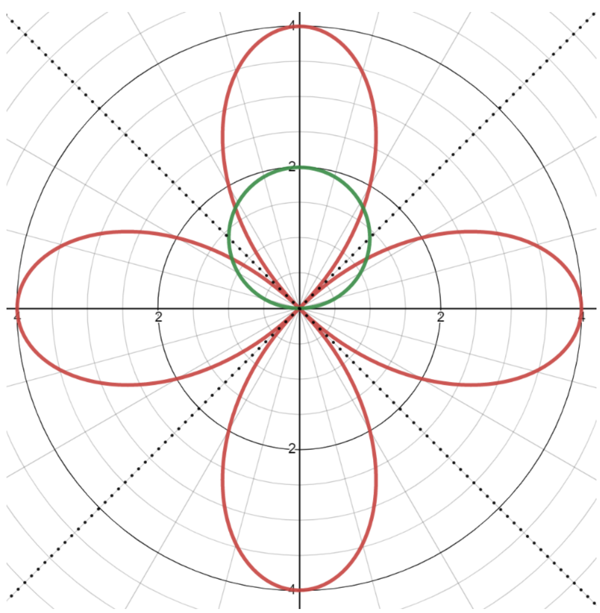

Fig. 1: Gráficas de las curvas

Dicho esto, buscamos 5 puntos de intersección.

1. Primero mostraremos que el punto de coordenadas cartesianas $(0,0)$ pertenece a ambas curvas;

(a) Sea $\theta = 0$, entonces $r_1 = 2\sin(0) = 0$, luego el punto de coordenadas polares $(r_1, 0) = (0, 0)$ (que pertenece a la primera curva) tiene como coordenadas cartesianas el $(0, 0)$.

(b) Sea $\theta = \frac{\pi}{4}$, entonces $r_2 = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, luego el punto de coordenadas polares $\left(r_2, \frac{\pi}{4}\right) = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ tiene como coordenadas cartesianas $(0, 0)$.

Concluímos que el origen es un punto de intersección que es recorrido por las curvas en ángulos distintos.

2. Buscamos ahora si existen puntos que coinciden en ángulo y en radio; Sea θ tal que $r_1 = r_2$, entonces

$$
\begin{aligned}
2\sin(\theta) &= 4\cos(\theta) \\
\sin(\theta) &= 2(1 - 2\sin^2(\theta)) \\
0 &= 4\sin^2(\theta) + \sin(\theta) - 2 \\
\Rightarrow \sin(\theta) &= \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8} \ ,
\end{aligned}
$$

ecuación que define dos soluciones:

(a) $\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)$, ángulo del primer cuadrante, lo que nos da otro ángulo solución en el segundo cuadrante $\theta_1' = \pi - \theta_1$. (Por simetría con respecto al eje y).

(b) $\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{33}-1}{8}\right)$ ángulo del segundo cuadrante, lo que nos da otro ángulo solución en el primer cuadrante $\theta_2' = \pi - \theta_2$. (Por simetría con respecto al eje y).

Con esto vemos la gráfica de los puntos encontrados y corroboración gráfica de que corresponden efectivamente a las intersecciones buscadas.

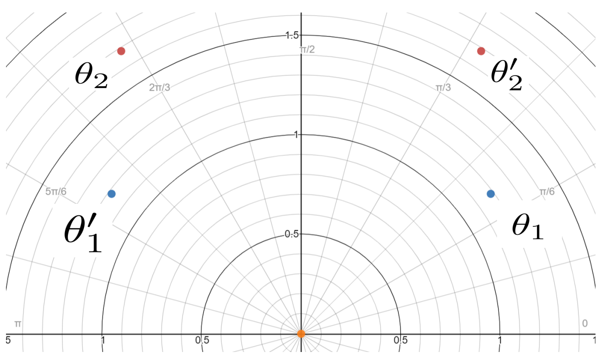

Fig. 2: Gráficas puntos de intersección

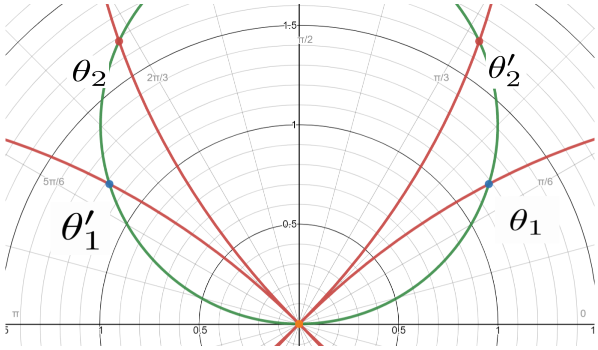

Fig. 3: Gráficas puntos de intersección con las curvas