Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2021

Ejercicio resuelto 4

- Sean $S = \text{Gen}\left(\left(\begin{array}{c}1\\1\\0\end{array}\right), \left(\begin{array}{c}0\\1\\1\end{array}\right)\right)$ y $T = \text{Gen}\left(\left(\begin{array}{c}2\\3\\1\end{array}\right), \left(\begin{array}{c}1\\3\\2\end{array}\right)\right)$ dos subespacios de $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $S = T$.

Solución. Para demostrar esta igualdad tendremos en cuenta lo siguiente:

- $S = T \Leftrightarrow S \subseteq T$ y $T \subseteq S$.
- Digamos
$$v_1 = \left(\begin{array}{c}1\\1\\0\end{array}\right), \; v_2 = \left(\begin{array}{c}0\\1\\1\end{array}\right), \; w_1 = \left(\begin{array}{c}2\\3\\1\end{array}\right), \; w_2 = \left(\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\right).$$
Así se tiene que $S = \text{Gen}\{v_1, v_2\}$ y $T = \text{Gen}\{w_1, w_2\}$.
- Si $v_1, v_2 \in T$, al ser T subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$,tenemos$\alpha v_1 + \beta v_2 \in T$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (básicamente ser subespacio vectorial es ser cerrado bajo combinaciones lineales). En otras palabras, $v_1, v_2 \in T \Rightarrow \text{Gen}\{v_1, v_2\} \subseteq T \Rightarrow S \subseteq T$.

  Análogamente decimos $w_1, w_2 \in S \Rightarrow \text{Gen}\{w_1, w_2\} \subseteq S \Rightarrow T \subseteq S$.

Dicho esto, buscamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $v_1 = \alpha w_1 + \beta w_2$:

- $$\left(\begin{array}{c}1\\1\\0\end{array}\right) = \alpha\left(\begin{array}{c}2\\3\\1\end{array}\right) + \beta\left(\begin{array}{c}1\\3\\2\end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{rcr}1 &=& 2\alpha + \beta\\ 1 &=& 3\alpha + 3\beta\\ 0 &=& \alpha + 2\beta\end{array}$$

Lo que nos deja las soluciones $\alpha = \frac{2}{3}$ y $\beta = \frac{-1}{3}$. En particular $v_1 \in T$.

Vemos ahora $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $v_2 = \alpha w_1 + \beta w_2$:

- $$\left(\begin{array}{c}0\\1\\1\end{array}\right) = \alpha\left(\begin{array}{c}2\\3\\1\end{array}\right) + \beta\left(\begin{array}{c}1\\3\\2\end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{rcr}0 &=& 2\alpha + \beta\\ 1 &=& 3\alpha + 3\beta\\ 1 &=& \alpha + 2\beta\end{array}$$

Lo que nos deja las soluciones $\alpha = \frac{-1}{3}$ y $\beta = \frac{2}{3}$. En particular $v_2 \in T$, lo que demuestra que $S \subseteq T$.

Para mostrar $T \subseteq S$ procedemos análogamente; buscamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $w_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$:

- $$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcr} 2 & = & \alpha \\ 3 & = & \alpha + \beta \\ 1 & = & \beta \end{array}$$

Donde las soluciones son $\alpha = 2$ y $\beta = 1$. En particular $w_1 \in S$.
Encontramos también $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $w_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$

- $$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcr} 1 & = & \alpha \\ 3 & = & \alpha + \beta \\ 2 & = & \beta \end{array}$$

Donde las soluciones son $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. En particular $w_2 \in S$, lo que demuestra que $T \subseteq S$.
Concluímos así que $S = T$.