Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2021

Ejercicio resuelto 5 - Posible solución Taller 2

1. Considere los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$U_1 = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0,\ y + w = 0\right\}$$

$$U_2 = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \mid v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ,\alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}$$

   (a) Encuentre los generadores de U_1 y escríbalo como subespacio generado.
   (b) Encuentre los generadores de $U_1^{\perp}$ y escríbalo como subespacio generado.
   (c) Encuentre los generadores de $U_1 \cap U_2$ y de $U_1 + U_2$ y escríbalos como subespacios generados.

Solución. (a) Escribimos el conjunto U_1 de formas distintas hasta obtener una descripción como subespacio generado;

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0,\ y + w = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2y - z\ ,\ w = -y\right\} \\ &= \left\{(2y - z, y, z, -y) \in \mathbb{R}^4 \mid y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(-z,0,z,0) + (2y,y,0,-y) \in \mathbb{R}^4 \mid y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{z(-1,0,1,0) + y(2,1,0,-1) \in \mathbb{R}^4 \mid y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Gen}\left(\ (-1,0,1,0)\ ,\ (2,1,0,-1)\ \right) \end{aligned}$$

Tenemos así el conjunto de generadores $C_1 = \{(-1,0,1,0)\ ,\ (2,1,0,-1)\}$.

Solución. (b) Escribimos el conjunto $U_1^{\perp}$ de formas distintas hasta obtener una descripción como subespacio generado;

$$\begin{aligned} U_1^{\perp} &= \left\{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot u = 0\ ,\ \forall\ u \in U_1\right\} \\ &= \left\{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot (\alpha u_1 + \beta u_2) = 0\ ,\ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{v \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha(v \cdot u_1) + \beta(v \cdot u_2) = 0\ ,\ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot u_1 = 0\ ,\ v \cdot u_2 = 0\right\} \quad * \\ &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid (x,y,z,w) \cdot (-1,0,1,0) = 0\ ,\ (x,y,z,w) \cdot (2,1,0,-1) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid z = x,\ w = 2x + y\right\} \end{aligned}$$

(*Acá vemos que la descripción de U_1 como subespacio generado es útil; la condición de ser perpendicular a todo U_1 se reduce a ser perpendicular a sus generadores).

Con esto ya podemos encontrar una descripción como subespacio generado ;

$$\begin{aligned}
U_1^{\perp} &= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid z = x,\ w = 2x + y\big\} \\
&= \big\{(x,y,x,2x+y) \in \mathbb{R}^4 \mid z = x,\ w = 2x + y\big\} \\
&= \big\{x(1,0,1,2) + y(0,1,0,1) \in \mathbb{R}^4 \mid y, x \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \mathrm{Gen}(\ (1,0,1,2)\ ,\ (0,1,0,1)\ )
\end{aligned}$$

Tenemos así el conjunto de generadores $C_2 = \{(1,0,1,2)\ ,\ (0,1,0,1)\}$.

Solución. (c) Primero notamos que $U_2 = \mathrm{Gen}(\ (1,-1,0,2)\ ,\ (0,2,1,-1)\ )$. Escribimos también U_2 de otra forma para encontrar intersección;

$$\begin{aligned}
U_2 &= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = \alpha,\ 2\beta - \alpha = y,\ z = \beta,\ 2\alpha - \beta = w\big\} \\
&= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2z - x = y\ ,\ 2x - z = w\big\}
\end{aligned}$$

Con esto vemos $U_1 \cap U_2$:

$$\begin{aligned}
U_1 \cap U_2 &= \big\{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \in U_1\ ,\ v \in U_2\big\} \\
&= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2y - z\ ,\ w = -y\ ,\ 2z - x = y\ ,\ 2x - z = w\big\} \\
&= \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z = -w\big\} \\
&= \{(x,x,x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Gen}(\ (1,1,1,-1)\ )
\end{aligned}$$

Lo que nos deja el conjunto generador $C_3 = \{(1,1,1,-1)\}$

Finalmente, para $U_1 + U_2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
U_1 + U_2 &= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v = a + b\ ,\ \text{con } a \in U_1,\ b \in U_2\} \\
&= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \text{ es combinación lineal de los generadores de } U_1 \text{ y } U_2\ \} \\
&= \mathrm{Gen}(\ (-1,0,1,0)\ (2,1,0,-1)\ (1,-1,0,2)\ (0,2,1,-1)\ )
\end{aligned}$$

Lo que nos deja el conjunto de generadores $C_4 = \{(-1,0,1,0)\ ,\ (2,1,0,-1)\ ,\ (1,-1,0,2)\ ,\ (0,2,1,-1)\}$.

2. Considere los subespacios de $M_{22}(\mathbb{R})$

$$W_1 = \{A \in M_{22}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$$

$$W_2 = \{A \in M_{22}(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{22} = 0\}$$

(a) Encuentre los generadores de W_1 y W_2 y escríbalos como subespacio generado.

(b) Encuentre los generadores de $W_1 \cap W_2$ y de $W_1 + W_2$ y escríbalos como subespacio generado.

Solución. (a) Escribimos los conjuntos de formas distintas para obtener los generadores;

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R}) \ \mid \ a_{12} = a_{21} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \ \mid \ a_{11},\ a_{22},\ a_{12} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \mid \ a_{11},\ a_{22},\ a_{12} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Gen}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Tenemos el conjunto de generadores $C_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\begin{aligned} W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R}) \ \mid \ a_{22} = -a_{11} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & -a_{11} \end{pmatrix} \ \mid \ a_{11},\ a_{12},\ a_{21} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \mid \ a_{11},\ a_{12},\ a_{21} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Gen}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Tenemos el conjunto de generadores $C_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución. (b) Procedemos como antes

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R}) \ \mid \ a_{12} = a_{21}\ ,\ a_{22} = -a_{11} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} \ \mid \ a_{11},\ a_{12} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \mid \ a_{11},\ a_{12} \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$= \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Tenemos el conjunto de generadores $C_7 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Vemos finalmente $W_1 + W_2$:

$$W_1 + W_2 = \text{Gen}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Tenemos el conjunto generador

$$C_8 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

---

3. Para los generadores encontrados en los ejercicios anteriores, determine si forman un conjunto l.i. o l.d. En el caso que sea l.d. determine cuál o cuáles de ellos son combinaciones lineales de los otros y reduzca el número de generadores.

Solución. Para decidir la independencia lineal de los conjuntos utilizaremos tanto la definición de conjunto l.i. y conjunto l.d. como el criterio para conjuntos l.i.

(a) C_1: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(-1,0,1,0) = (2,1,0,-1)$, entonces $\alpha = 0$ y $\alpha = -2$. Por lo tanto no existe tal α. Luego, como los vectores de C_1 no son paralelos, por definición de conjunto l.i., C_1 es l.i.

(b) C_2 : Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(1,0,1,2) = (0,1,0,1)$, entonces $\alpha = 0$ y $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto C_2 es l.i.

(c) C_3 : Como es un conjunto que contiene sólo un elemento, por definición es conjunto l.i. Si hay dudas aplicar criterio; sea $v \neq 0$ un vector y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, por lo tanto l.i.

(d) C_4 : Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned}(0,0,0,0) = \alpha_1(-1,0,1,0) + \alpha_2(2,1,0,-1) &+ \alpha_3(1,-1,0,2) + \alpha_4(0,2,1,-1)\\ \Leftrightarrow\quad -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0\\ \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 &= 0\\ \alpha_1 + \alpha_4 &= 0\\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 &= 0\end{aligned}$$

Lo que deja las soluciones $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. El criterio nos dice que el conjunto es l.i.

(e) C_5 : Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \ .$$

Por lo que el conjunto es l.i.

(f) C_6 : Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \ .$$

Por lo tanto el conjunto es l.i.

(g) C_7 : notamos que no existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto pues el sistema es inconsistente $(\alpha \cdot 0 = 1)$. Concluímos que el conjunto es l.i.

(h) C_8 : Notamos que el conjunto es l.d. pues hay un par de vectores que son combinación lineal de algunos de los otros:

- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Afirmación: El conjunto $\bar{C}_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i.

Dem: Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Por criterio concluímos que $\bar{C}_8$ es l.i.