Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra y Geometría, segundo semestre 2021

Ejercicio resuelto 6

1. Determine una base y la dimensión del e.v. $S = \{p(x) \in \mathbb{P}_3[x] \mid p(2) = 0\}$
2. Determine si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: Si W es subespacio de un e.v. V, entonces $W + W = W$.

Solución. **(1)** Buscamos primero algunos generadores:

$$\begin{aligned} S &= \big\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3[x] \mid p(2) = 0\big\} \\ &= \big\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3[x] \mid a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 = 0\big\} \\ &= \big\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3[x] \mid a_0 = -2a_1 - 4a_2 - 8a_3\big\} \\ &= \big\{-2a_1 - 4a_2 - 8a_3 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{a_1(x-2) + a_2(x^2-4) + a_3(x^3-8) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\big\} \\ S &= \text{Gen}\,\big(\ x-2\ ,\ x^2-4\ ,\ x^3-8\ \big) \end{aligned}$$

Con esto el conjunto $B = \{\ x-2\ ,\ x^2-4\ ,\ x^3-8\}$ es conjunto generador de S.

Ahora, sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha(x-2)+\beta(x^2-4)+\gamma(x^3-8) = 0$ entonces $\alpha = \beta = \gamma = 0$, por lo tanto B es l.i.

Concluímos que B es base del subespacio S, el cual es de dimensión 3.

Solución. **(2)** La afirmación es verdadera pues al ser W subespacio, en particular es cerrado bajo la suma. Una demostración rigurosa a continuación:

• Claramente $W \subseteq W + W$ ya que si $w \in W$ entonces $w = w + 0 \in W + W$. (El vector 0 está en todos los subespacios).

• Sea ahora $v \in W + W$, entonces existen $w_1, w_2 \in W$ tales que $v = w_1 + w_2$, como W es subespacio, es cerrado bajo la suma, por lo tanto $v = w_1 + w_2 \in W$. Esto muestra que $W + W \subseteq W$.

• Como $W \subseteq W + W$ y $W + W \subseteq W$ demostramos que $W = W + W$. Concluímos que la afirmación es verdadera.