**Universidad de Chile**
**Programa Académico de Bachillerato**
**Álgebra y Geometría, segundo semestre 2021**

# Ejercicio resuelto 9 - Posible solución Taller 3

1. Sean $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dos transformaciones lineales tales que

$$T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad,\quad T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$S\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad,\quad S\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad,\quad S\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$$

   Encuentre las matrices representantes de $T$, $S$ y $S\circ T$ en bases canónicas.

2. Dada una base $B$ cualquiera de $\mathbb{P}_3[x]$ y $C$ la base canónica, considere la matriz

$$[id]_B^C=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\0&0&1&2\\1&2&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

   Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   (a) Si $[p(x)]_B=(1\ 1\ -1\ 0)$, entonces $p(x)=1+x-x^2$.
   (b) Si $p(x)=2-3x^2+x^3$, entonces $[p(x)]_B=(2\ 0\ -3\ 1)$.
   (c) La base $B$ es $\{1+x^2,-1+2x^2+x^3,x+x^2,1+2x+x^3\}$.

---

**Solución. 1.** Sean $C_2$ y $C_3$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente y $B=\{(2,-1),(-1,1)\}$. Notamos que $B$ consiste de dos vectores l.i. en $\mathbb{R}^2$, es decir, $B$ es base de $\mathbb{R}^2$. Así tenemos las siguientes matrices:

$$[T]_B^{C_3}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad,\quad [id]_B^{C_2}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

Además podemos calcular su inversa,

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&-1&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&2\\1&-1&0&-1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&1\\0&1&1&2\end{array}\right)$$

Lo que nos dice que $[id]_{C_2}^{B} = \left([id]_{B}^{C_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Con esto tenemos la matriz buscada

$$\begin{aligned}
[T]_{C_2}^{C_3} &= [T]_{B}^{C_3} \cdot [id]_{C_2}^{B} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Procedemos análogamente para $S$. Sea $B' = \{(3,0,1), (-1,1,1), (0,1,-1)\}$. $B'$ es base de $\mathbb{R}^3$,por lo que conocemos las siguientes matrices:

$$[T]_{B'}^{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad [id]_{B'}^{C_3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad [id]_{C_3}^{B'} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Con lo que tenemos la matriz buscada

$$\begin{aligned}
[S]_{C_3}^{C_2} &= [T]_{B'}^{C_2} \cdot [id]_{C_3}^{B'} \\
&= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 16 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $L = S \circ T$. Tenemos que la matriz representante en bases canónicas de $L$, denotada como $[L]_{C_2}^{C_2}$ es la única matriz tal que para todo $v \in \mathbb{R}^2$, $[L]_{C_2}^{C_2}[v]_{C_2} = [L(v)]_{C_2}$, Pero vemos que

$$\begin{aligned}
[L(v)]_{C_2} &= [(S \circ T)(v)]_{C_2} \\
&= [S(T(v))]_{C_2} \\
&= [S]_{C_3}^{C_2} \ [T(v)]_{C_3} \\
&= \left([S]_{C_3}^{C_2}\right) \left([T]_{C_2}^{C^3} \ [v]_{C_2}\right) \\
&= \left([S]_{C_3}^{C_2} \ [T]_{C_2}^{C^3}\right) [v]_{C_2}
\end{aligned}$$

Es decir, se tiene que

$$\begin{aligned}
[L]_{C_2}^{C_2} &= [S]_{C_3}^{C_2} \cdot [T]_{C_2}^{C^3} \\
&= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 16 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

**Solución. 2. a)** Si consideramos que $[id]_B^C\ [p(x)]_B = [p(x)]_C$, se tiene que

$$[p(x)]_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como esas son sus coordenadas en la base canónica, tenemos que $p(x) = -x + 2x^2 + x^3$, por lo que la afirmación es falsa.

**Solución. 2. b)** Análogo a lo anterior, usando que $[id]_B^C\ [p(x)]_B = [p(x)]_C$ obtenemos

$$[p(x)]_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego el polinomio con esas coordenadas corresponde a $p(x) = 3 - x - x^2 + x^3$. Concluímos que la afirmación es falsa.

**Solución. 2. c)** Como $\dim(\mathbb{P}_3[x]) = 4$, cada base tiene 4 elementos. Digamos $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Notamos que $[v_1]_B = (1\ 0\ 0\ 0)$, por lo que

$$\begin{aligned} [v_1]_C &= [id]_B^C \cdot [v_1]_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lo que corresponde exactamente a la primera columna de la matriz $[id]_B^C$. De esto vemos que $v_1 = 1 + x^2$.

De forma análoga obtenemos que la segunda, tercera y cuarta columna de $[id]_B^C$ corresponde a $[v_2]_C$, $[v_3]_C$ y $[v_4]_C$ respectivamente, por lo que $v_2 = -1 + 2x^2$, $v_3 = x + x^2 + x^3$ y $v_4 = 1 + 2x + x^3$. Concluímos que la afirmación es verdadera.