Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2022

Pauta Control 2

07/10/2022

Instrucciones:

- **Disponen de 30 minutos para el desarrollo del control.**
- **Justifique cada uno de sus resultados.**
- **Debe responder SOLO uno de los dos problemas que se presentan.**
- **Es individual.**
- **Nombre:**

Problemas:

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable **cuya función derivada** es $f'(x) = \dfrac{2x}{(x-1)^2+3}$. Aplique el cálculo diferencial para determinar

   a) los x tal que el gráfico de f posee punto de inflexión (si es que existen). **(4 puntos)**

   Solución: Para obtener los puntos de inflexión de f necesitaremos analizar $f''(x)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2[(x-1)^2+3] - 2x\cdot 2(x-1)}{[(x-1)^2+3]^2} \\ &= \frac{2(x^2-2x+4) - 4x^2+4x}{[(x-1)^2+3]^2} \\ &= \frac{-2x^2+8}{[(x-1)^2+3]^2} \\ &= \frac{-2(x^2-4)}{[(x-1)^2+3]^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{1.5 puntos}}$$

   Luego,

$$f''(x) = 0 \quad \iff \quad x^2 - 4 = 0 \quad \iff \quad x = \pm 2$$

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

	$x \in (-\infty, -2]$	$x \in (-2, 2)$	$x \in [2, \infty)$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$
f''	$-$	$+$	$-$

$$f''(-3) < 0, \qquad f''(0) > 0 \qquad \text{y} \qquad f''(3) < 0\,.$$

1 punto

Por lo tanto,

- f posee puntos de inflexión en $x = -2$ y $x = 2$.

1 punto

b) intervalos donde el gráfico de f es cóncavo hacia arriba e intervalos donde el gráfico de f es cóncavo hacia abajo. **(2 puntos)**

Solución:

- f es cóncava hacia abajo en $]-\infty, -2]$ y en $[2, \infty[$.

1 punto

- f es cóncava hacia arriba en $[-2, 2]$.

1 punto

2. Sea $f : \mathbb{R} - \{-2, 4\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{30}{(x-4)(x+2)}$. Aplique el cálculo diferencial para determinar

a) máximos y mínimos locales de la función f (si es que existen). **(4 puntos)**

Solución: manipulando algebraicamente la regla de asignación se tiene

$$f(x) = \frac{30}{x^2 - 2x - 8} = 30(x^2 - 2x - 8)^{-1}\,.$$

Para estudiar los valores máximos y/o mínimos de f, necesitamos $f'(x)$

$$f'(x) = -30(x^2 - 2x - 8)^{-2} \cdot (2x - 2), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$$

1.5 puntos

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x - 2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1$$

0.5 puntos

Análisis de signo:

	$x \in]-\infty, -2[$	$x \in]-2, 1[$	$x \in]1, 4[$	$x \in]4, \infty[$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
f'	$+$	$+$	$-$	$-$

$$f'(-3) > 0, \qquad f'(0) > 0, \qquad f'(2) < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(5) < 0$$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

Por lo tanto, f alcanza un máximo local en $x = 1$ y $f(1) = -\frac{10}{3}$. Mínimo local no posee.

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

b) intervalos donde f es creciente e intervalo donde f es decreciente. **(2 puntos)**

Solución:

- f es creciente en $]-\infty, -2[$ y en $]-2, 1]$.

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

- f es decreciente en $[1, 4[$ y en $]4, \infty[$.

$\boxed{\textbf{1 punto}}$