Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2022

Pauta Control 3

28/10/2022

Instrucciones:

- **Disponen de 30 minutos para el desarrollo del control.**
- **Justifique cada uno de sus resultados.**
- **Debe responder SOLO uno de los dos problemas que se presentan.**
- **Es individual.**
- **Nombre:**

Problemas:

1. Cierto tipo de árbol presenta una altura $h(t)$ después de t años de haber sido trasplantado, y se sabe que su altura crece con una rapidez

$$h'(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t \geq 0,$$

metros por año. Si transcurridos dos años la altura que alcanzó el árbol fue de 5 metros, ¿qué altura tenía el árbol cuando fue trasplantado? **(6 puntos)**

Solución: Sea t el tiempo medido en años y $h(t)$ la altura del árbol a los t años, medida en metros.

Datos:

$$\frac{dh}{dt} = \left(\sqrt{t} + \frac{1}{(t+1)^2}\right) \left[\frac{m}{\text{años}}\right] \qquad \text{y} \qquad h(2) = 5[m].$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Objetivo: determinar la altura inicial, es decir, $h(0) =?$

$$h(t) = \int \left(\sqrt{t} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) \, dt = \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} - \frac{1}{t+1} + c.$$

$$\boxed{\text{2.5 puntos}}$$

Además,

$$h(2) = \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} - \frac{1}{3} + c = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{16 - 2^{5/2}}{3}.$$

$$\boxed{\text{0.5 puntos}}$$

De esta manera, el modelo de altura del árbol está dado por:

$$h(t) = t - \frac{1}{t+1} + \frac{16 - 2^{5/2}}{3}, \;\; t \geq 0\,.$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

así,

$$h(0) = -1 + \frac{16 - 2^{5/2}}{3} = \frac{13 - 2^{5/2}}{3} \, [m].$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

2. Encuentre la función $f\colon\,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right) + \frac{4x\sqrt{x} + x^2}{x^4} - 3$$

y $f(1) = 0$. **(6 puntos)**

Solución: Tenemos que

$$f(x) = \int \left(2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right) + \frac{4x\sqrt{x} + x^2}{x^4} - 3 \right) \, dx$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Aplicando la propiedad de linealidad nos queda:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ dx + 4\int \frac{x\sqrt{x}}{x^4}\ dx + \int \frac{x^2}{x^4}\ dx - 3\int 1\ dx & \boxed{\textbf{1.5 puntos}}\\
&= \frac{-2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}} + 4\int x^{-\frac{5}{2}}\ dx + \int x^{-2}\ dx - 3x & \boxed{\textbf{1 punto}}\\
&= -\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 4\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} - 3x + c, \quad c\in\mathbb{R}\\
&= -\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{8x^{-\frac{3}{2}}}{3} - x^{-1} - 3x + c\ . & \boxed{\textbf{1 punto}}
\end{aligned}$$

Además, $f(1) = 0$, evaluando

$$0 = -\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{8}{3} - 1 - 3 + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{20}{3}\ .$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Finalmente,

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{8x^{-\frac{3}{2}}}{3} - x^{-1} - 3x + \frac{20}{3}\ .$$

$$\boxed{\text{0.5 puntos}}$$