



Ayudantía 12
Integración y Áreas
25/11/2022

En esta ayudantía haremos uso de los distintos métodos de integración para resolver integrales definidas e indefinidas. Además, aplicaremos la integral para el cálculo del área de una región entre dos curvas.

Objetivos:

- Aplicar los métodos de integración para la resolución de integrales definidas e indefinidas.
- Calcular el área de una región en el plano mediante integrales.

Ejercicios Propuestos

1. Resuelva las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes.

a) $\int x^4 \ln(3x) dx.$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos(x) dx.$

Solución:

Para a) hacer $u = \ln(3x)$ y $dv = x^4$, integrar por partes, y obtener $\frac{x^5}{5} \ln(3x) - \frac{x^5}{25} + C.$

El b) está en ayudantía del 2021.

2. Resuelva las siguientes integrales de funciones racionales.

a) $\int \frac{2}{x^2 - 2x - 3} dx.$

b) $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx.$

Solución: Para a) descomponer en fracciones parciales, integrar y obtener $\frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{x-3}{x+1} \right| \right) + C.$

El b) está en ayudantía del 2021 pero indefinida: al evaluarla da $\frac{3\pi}{8} + \ln(\sqrt{2}).$

3. Calcule el área de la región comprendida entre las curvas $y = \frac{x}{x+2}$ e $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+12}}$ para $0 \leq x \leq 6.$

Solución:

Llamar $f(x) = \frac{x}{x+2}$ y $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+12}}$, ambas con scontinuas en $] - 2, +\infty[$.

Se cumple $f(x) = g(x) \iff x = 0, x = 2$.

Se evalúa en un punto (ej $x = 1$) en $]0, 2[$ y se obtiene que $f > g$.

Se evalúa en un punto (ej $x = 4$) en $]2, 6[$ y se obtiene que $f < g$.

Luego $A = \int_0^2 (f - g) + \int_2^6 (g - f)$.

Las integrales $\int f$ y $\int g$ se resuelven por sustitución.

El resultado da $A = 6\sqrt{3} - 10$.